РУКОВОДСТВО

КЪ

АРИѲМЕТИКѢ,

для употребленія

въ уѣздныхъ училищахъ

РОССІЙСКОЙ ИМПЕРІИ,

изданное

Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1830.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЕНІЕ III.

О дробяхъ.

ГЛАВА 1. Предварительныя объясненія. § 61—76.
——— 2. Сложеніе простыхъ дробей. § 77—81.
——— 3. Вычитаніе.................. § 82—85.
——— 4. Умноженіе.................. § 86—90.
——— 5. Дѣленіе.................... § 91—95.
——— 6. Десятичныя дроби и четыре дѣйствія оныхъ... § 96—102.
——— 7. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя и обратно. § 103—105.
——— 8. Періодическія десятичныя дроби.................... § 106 и 107.
——— 9. Непрерывныя дроби...... § 108 и 109.

ОТДѢЛЕНІЕ IV.

Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ.

ГЛАВА 1. Объ отношеніяхъ...... § 110—118.
——— 2. О пропорціяхъ.......... § 119—130.

Отдѣленіе V.

О тройныхъ правилахъ.

ГЛАВА 1. Простое тройное правило. § 131—134.
—— 2. Сложное тройное правило. § 135—137.
—— 3. Правила товарищества и смѣшенія . . . . § 138 и 139.
Заключеніе . . . . § 140.
Прибавленіе 1. О возвышеніи во вторую и третью степени и извлеченіи корней тѣхъ же степеней. . . . . § 141—150.
Прибавленіе 2. Таблицы иностранныхъ монетъ, мѣръ и вѣсовъ, стран. 182.

ОТДѢЛЕНІЕ III.

О ДРОБЯХЪ.

ГЛАВА I.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ОБЪЯСНЕНІЯ.

§ 61. *Происхожденіе дробей.*

Выше (§ 36) было замѣчено, что не всегда одно число дѣлится на другое безъ остатка; на прим., если 13 раздѣлить на 2; то въ частномъ получится 6, и 1 въ остаткѣ. Частное болѣе 6, потому что 6 ⨯ 2, только 12; а менѣе 7, ибо 7 ⨯ 2 равно 14, что болѣе дѣлимаго: и такъ искомое частное должно заключаться между 6 и 7, то есть, равно 6 единицамъ и еще части единицы. Чтобъ найти сію часть единицы, должно оставшуюся отъ дѣлимаго единицу раздѣлить на двѣ равныя части, и взять одну таковую часть.

§ 62. *Наименованіе частей единицы.*

Если 1 единица раздѣлена будетъ на двѣ равныя части, то каждая называется *половиною;* если въ 1 единицѣ 3 равныя части, то каждая называется *третью;* если въ одной единицѣ 4 равныя части, то каждая называется *четвертью*, и такъ далѣе.

Каждая часть единицы получаетъ свое наименованіе отъ числа *частей*, которыя должны быть въ цѣлой единицѣ.

§ 63. *Сравненіе частей.*

Чѣмъ болѣе частей въ одной и той же единицѣ, тѣмъ части должны быть мѣльче или меньше; и такъ

1 половина должна быть болѣе 1 трети
1 треть . . . . 1 четвер.
1 четверть . . . . 1 пятой.
и такъ далѣе

и обратно: 1 десятая должна быть менѣе 1 седьмой; потому что въ одной и той же единицѣ первыхъ частей должно быть 10, а вторыхъ только 7.

§ 64. *Опредѣленіе дроби.*

Одна или совокупленіе нѣсколькихъ равныхъ частей единицы называется *дробью.* Для точнаго представленія какой нибудь дроби

должно знать какъ велики доли, и сколько ихъ находится въ оной.

Первое, то есть *величину* частей узнаемъ, когда извѣстно будетъ сколько таковыхъ частей въ единицѣ, и число, сіе показывающее, именуется *знаменателемъ;* второе же число, означающее сколько частей находится въ дроби, *числителемъ.* Оба сіи числа называются членами данной дроби. При выговариваніи дроби сперва произносится числитель, а потомъ знаменатель.

§ 65. *Двоякое разсматриваніе дроби.*

Каждую дробь, на прим., три четверти, можно разсматривать двоякимъ образомъ: во первыхъ, какъ совокупленіе трехъ частей единицы, раздѣленной на четыре равныя части; ибо, если единица будетъ раздѣлена на четыре части, то каждая часть будетъ четверть, а три таковыхъ частей составятъ данную дробь три четверти. Во вторыхъ, дробь три четверти можно разсматривать какъ частное число, происшедшее отъ дѣленія числителя 3 на знаменателя 4; ибо, если раздѣлить единицу на 4 равныя доли, то получится 1 четверть; слѣд. если раздѣлить 3 единицы на четыре равныя части, то получится въ три раза болѣе, т. е., три четверти.

§ 66. *Изображенiе дробей цифрами.*

На послѣднемъ объясненiи происхожденiя дробей основано изображенiе оныхъ цифрами. Поелику дробь есть частное число, происходящее отъ дѣленiя числителя на знаменателя; посему для изображенiя оной пишется сперва числитель, потомъ проводится черта, означающая дѣйствiе дѣленiя, и подъ оною подписывается знаменатель. На прим., дробь четыре девятыхъ происходитъ отъ дѣленiя четырехъ единицъ на 9 равныхъ частей, и посему должна быть изображена слѣдующимъ образомъ: $\frac{4}{9}$.

§ 67. *Раздѣленiе дробей на правильныя и неправильныя.*

Выше было сказано, что если единица будетъ раздѣлена на двѣ равныя части, то каждая часть называется половиною; изъ сего слѣдуетъ, что въ единицѣ 2 половины, и посему она можетъ быть изображена въ видѣ дроби: $\frac{2}{2}$. Она можетъ быть также изображена и въ видѣ слѣдующихъ дробей: $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ и $\frac{10}{10}$ и проч., ибо въ ней заключается 3 трети, 4 четверти, или 10 десятыхъ и проч. Во всѣхъ дробяхъ, о которыхъ прежде было говорено, числитель былъ менѣе знаменателя; въ дробяхъ, равныхъ единицѣ, числитель равенъ

знаменателю; теперь разсмотримъ дробь, въ которой числитель болѣе знаменителя, на прим. $\frac{7}{4}$.

Въ сей дроби знаменитель 4 означаетъ четвертыя доли единицы, а числитель 7 показываетъ, что оныхъ должно взять 7, для составленія дроби; но какъ въ единицѣ четвертей только четыре, то изъ того слѣдуетъ, что дробь $\frac{7}{4}$ болѣе единицы. Изъ всего выше сказаннаго явствуетъ, что дробь можетъ быть менѣе, равна, и болѣе единицы; въ первомъ случаѣ она называется *правильною*, а въ двухъ послѣднихъ *неправильною*. И такъ *правильная дробь есть такая дробь, въ которой числитель менѣе знаменателя, а неправильная есть такая дробь, въ которой числитель равенъ или болѣе знаменателя.*

§ 68. *Исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби.*

Поелику неправильная дробь болѣе единицы; то разсмотримъ какимъ образомъ можно опредѣлить, сколько единицъ въ оной заключается. Положимъ что требуется узнать сколько единицъ содержится въ дроби $\frac{12}{4}$. Въ единицѣ заключается 4 четверти; и такъ чтобъ узнать сколько единицъ въ 12 четвертяхъ, надлежитъ найти, сколько разъ 4 четверти

содержатся въ 12 четвертяхъ; для сего надобно 12 раздѣлить на 4, и частное число 3, будетъ искомое, т. е. въ $\frac{12}{4}$, 3 единицы.

Рѣшимъ еще одинъ примѣръ. Положимъ, что требуется узнать сколько единицъ въ неправильной дроби $\frac{15}{4}$. Въ сей дроби единица содержится столько разъ, сколько 4 четверти заключаются въ 15 четвертяхъ, т. е., 3 раза, и еще 3 четверти остаются въ остаткѣ; и такъ въ данной неправильной дроби $3\frac{3}{4}$ единицы.

Изъ сего слѣдуетъ, что для нахожденія, сколько единицъ заключается въ данной неправильной дроби, или, какъ обыкновенно выражаются, *чтобъ исключить цѣлое число изъ неправильной дроби, надлежитъ числителя раздѣлить на знаменателя, и частное число будетъ искомое. Если же при семъ будетъ остатокъ, то оный прибавляютъ къ частному, подписавъ знаменателя.*

§ 69. *Обращеніе смѣшаннаго и цѣлаго чиселъ въ неправильныя дроби.*

Займемся теперь обратнымъ дѣйствіемъ, т. е., обращеніемъ цѣлаго числа, или цѣлаго числа съ дробью (смѣшаннаго числа) въ неправильную дробь. Положимъ что требуется обратить $5\frac{1}{4}$ въ неправильную дробь. Прежде

всего должно 5 цѣлыхъ изобразить также въ четвертыхъ доляхъ: въ 1 единицѣ 4 четверти; слѣд. въ 5 единицахъ должно быть 5×4, или 20 четвертей; прибавивъ еще оставшуюся $\frac{1}{4}$, получимъ искомую неправильную дробь 21 четверть, т. е., $\frac{21}{4}$.

Изъ сего слѣдуетъ, что для обращенія цѣлаго числа съ дробью въ неправильную дробь надлежитъ цѣлое число умножить на знаменателя дроби, къ полученному произведенію прибавить числителя, и подъ суммою подписать знаменателя.

Изобразимъ теперь какое нибудь цѣлое число, на прим. 5, въ видѣ дроби. Положимъ, что требуется выразить оную въ четвертяхъ. Въ 1 единицѣ 4 четверти, слѣд. въ 5 единицахъ должно заключаться 5×4 или 20 четвертей, или $\frac{20}{4}$.

Изъ сего слѣдуетъ, что для обращенія цѣлаго числа въ неправильную дробь надлежитъ только данное число умножить на произвольное число; произведеніе будетъ числителемъ, а множитель знаменателемъ искомой дроби.

§ 70. *О измѣненіи величины дробей.*

Теперь слѣдуетъ разсмотрѣть какія перемѣны происходятъ въ величинѣ дробей, при

увеличиваніи и уменьшенія ихъ числителей и знаменателей.

I. Если умножимъ только числителя какой нибудь дроби, на прим: $\frac{3}{11}$, на какое нибудь число 3; то данная дробь обратится въ дробь $\frac{9}{11}$, которая должна быть болѣе, ибо въ ней 9 такихъ же частей, какихъ въ данной 3. Сверхъ сего, поелику въ полученной дроби втрое болѣе частей, то она должна быть въ 3 раза болѣе данной, т. е., во столько разъ болѣе, сколько единицъ во множителѣ. *И такъ если числитель какой нибудь дроби будетъ умноженъ на какое нибудь число, а знаменатель останется тотъ же, то дробь увеличится и увеличится во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.*

II. Если умножимъ только знаменателя какой нибудь дроби, на пр. $\frac{6}{7}$, на произвольное число 4; то данная дробь обратится въ дробь $\frac{6}{28}$, которая должна быть менѣе данной; ибо частей въ оной столько же, сколько и въ данной; части же менѣе, потому что оныхъ заключается въ единицѣ 28, между тѣмъ въ такой же единицъ частей данной дроби только 7 (§ 63). Изъ сего же явствуетъ что части новой дроби въ 4 раза менѣе, ибо оныхъ въ той же самой единицѣ въ 4 раза болѣе. *И такъ если знаменатель какой*

нибудь дроби будетъ умноженъ, а числитель останется тотъ же, то дробь уменьшится, и уменьшится во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.

III. Если раздѣлимъ числителя данной дроби $\frac{8}{16}$ на произвольное число 4, то оная обратится въ дробь $\frac{2}{16}$, которая будетъ менѣе данной; ибо въ ней заключается только 2 такихъ же частей, какихъ въ данной дроби 8; и поелику 2 части менѣе 8 таковыхъ же частей въ 4 раза, посему и данная дробь уменьшится въ 4 раза, т. е., во столько разъ, сколько единицъ въ дѣлителѣ. *И такъ если числитель какой нибудь дроби будетъ раздѣленъ, а знаменатель останется тотъ же, то дробь уменьшится во столько разъ, сколько единицъ въ дѣлителѣ.*

IV. Если знаменатель какой нибудь дроби $\frac{2}{15}$ будетъ раздѣленъ на произвольное число, на пр. 5, то изъ данной дроби получится дробь $\frac{2}{3}$, которая должна быть болѣе; ибо въ оной столько же частей какъ и въ данной, но части болѣе (крупнѣе), потому что оныхъ менѣе заключается *въ той же* единицѣ. Поелику таковыхъ частей въ той же единицѣ въ 5 разъ менѣе, нежели частей данной дроби; то и части новой дроби должны быть болѣе частей данной дроби въ

5 разъ; а изъ сего слѣдуетъ, что и самая дробь сдѣлалась въ 5 разъ болѣе, т. е., во столько разъ болѣе, сколько единицъ въ дѣлителѣ. *И такъ если знаменатель какой нибудь дроби будетъ раздѣленъ, а числитель останется тотъ же, то дробь увеличится, и увеличится во столько разъ, сколько единицъ въ дѣлителѣ.*

§. 71. *О перемѣнѣ вида дробей, не измѣняя величины оныхъ.*

Изъ предъидущаго § явствуетъ:

I. Если числитель и знаменатель какой нибудь дроби будутъ умножены на одно и тоже произвольное число, то дробь хотя измѣнится въ видѣ, но сохранитъ прежнюю свою величину; ибо во сколько разъ она увеличится отъ умноженія числителя (§ 70. I) во столько же разъ уменьшится отъ умноженія знаменателя на тоже число (§ 70. II). Положимъ что данной дроби $\frac{3}{8}$ числитель и знаменатель умножатся на 5, тогда она обратится въ дробь $\frac{15}{40}$. Въ сей дроби въ пятеро болѣе частей, но части или доли, въ какихъ она выражается, въ пять разъ менѣе; а изъ сего слѣдуетъ, что ея величина не измѣнилась.

II. Если числитель и знаменатель какой нибудь дроби будутъ раздѣлены на одно и

тоже произвольное число, то дробь также сохранитъ свою величину, хотя измѣнится по виду; ибо во сколько разъ она уменьшится отъ дѣленія числителя (§ 70. III.), во столько же разъ увеличится отъ дѣленія знаменателя на тоже число (§ 70. IV).

Раздѣлимъ числителя и знаменателя какой нибудь дроби $\frac{18}{27}$ на 9, то данная дробь обратится въ дробь $\frac{2}{3}$. Во второй дроби въ 9 разъ менѣе долей, но оныя вдевятеро болѣе долей первой дроби; изъ сего слѣдуетъ, что данная дробь $\frac{18}{27}$ должно быть равна $\frac{2}{3}$.

§ 72. *Сокращеніе дробей.*

Изъ втораго слѣдствія предъидущаго параграфа явствуетъ, что всякая дробь можетъ быть изображена меньшими числами, или приведена въ простѣйшій видъ, если числитель и знаменатель имѣютъ общаго дѣлителя. На прим. дробь $\frac{18}{27}$ можетъ быть приведена въ простѣйшій видъ, когда числитель и знаменатель раздѣлятся на общаго ихъ дѣлителя 3, и тогда она обратится въ слѣдующую дробь: $\frac{6}{9}$. Сію дробь можно привести еще въ простѣйшій видъ, раздѣливъ числителя и знаменателя на общаго дѣлителя 3; и тогда получится дробь $\frac{2}{3}$, которая не можетъ быть болѣе сокращаема, потому что 2 и 3 суть первыя числа. Таковое *приведе-*

ніе дробей въ меньшій видъ, не измѣняя ихъ величины, называется сокращеніемъ дробей.

Дѣйствіе сіе обыкновенно представляется въ слѣдующемъ видѣ.

$$\underset{3}{\frac{18}{27}} = \underset{3}{\frac{6}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Другой примѣръ. Сократить дробь: $\frac{64}{128}$.

$$\underset{4}{\frac{64}{128}} = \underset{8}{\frac{16}{32}} = \underset{2}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

И такъ $\frac{64}{128} = \frac{1}{2}$.

§ 73. *Признаки дѣлимости чиселъ на первыя девять чиселъ.*

Такъ какъ въ послѣдствіи часто нужно будетъ находить дѣлителей чиселъ, то весьма полезно знать признаки, по которымъ безъ затрудненія можно видѣть, дѣлятся ли данныя числа на первыя 9 чиселъ.

I. Всякое число, на прим. 146, дѣлится на два безъ остатка, если на мѣстѣ единицъ находится четное число; ибо въ такомъ случаѣ данное число состоитъ изъ нѣсколькихъ десятковъ, и четнаго числа единицъ. 2 единицы содержатся въ 1 десяткѣ 5 разъ; слѣд. и во всякомъ числѣ десятковъ должны заключаться безъ остатка; въ четномъ числѣ единицъ также заключается безъ остатка; а посему и во всемъ числѣ.

II. Всякое число дѣлится безъ остатка на 3, если сумма всѣхъ цифръ, оное изображающихъ, дѣлится на 3.

Всякое число десятковъ, тысячъ и т. д., можетъ быть раздѣлено на 3, такъ что остатокъ будетъ равняться самому числу десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д.; на прим., если 1 дес. раздѣлится на 3, то въ частномъ будетъ 3, а въ остаткѣ 1; если 2 десятка раздѣлятся на 3, то въ частномъ получится 6, а въ остаткѣ 2; если 3 десятка раздѣлятся на 3, то въ частномъ будетъ 10, или 9, и въ такомъ случаѣ въ остаткѣ будетъ 3.

Такимъ же образомъ можно раздѣлить каждое число сотенъ, тысячъ, и такъ далѣе. Для удобнѣйшаго обозрѣнія прилагается слѣдующая таблица:

1 десятокъ $= 3 \times 3 + 1$.
2 —— $= 6 \times 3 + 2$.
3 —— $= 9 \times 3 + 3$.
4 —— $= 12 \times 3 + 4$.
и такъ далѣе.

1 сотня $= 33 \times 3 + 1$.
2 —— $= 66 \times 3 + 2$.
3 —— $= 99 \times 3 + 3$.
4 —— $= 132 \times 3 + 4$.
и такъ далѣе.

$$1 \text{ тысяча} = 333 \times 3 + 1.$$
$$2 \text{ ——} = 666 \times 3 + 2.$$
$$3 \text{ ——} = 999 \times 3 + 3.$$
$$4 \text{ ——} = 1332 \times 3 + 4.$$

Зная сіе легко можно увѣриться въ выше приведенномъ правилѣ, разсмотрѣвъ какой нибудь частный случай. Пусть будетъ 3252 данное число и требуется узнать дѣлится ли оно на 3. Для сего разложимъ число десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д., на 2 числа, изъ коихъ бы одно дѣлилось на 3 безъ остатка, а другое бы равно было самому числу десятковъ, сотенъ, тысячъ. И такъ:

$$3000 = 999 \times 3 + 3.$$
$$200 = 66 \times 3 + 2.$$
$$50 = 15 \times 3 + 5.$$
$$2 = \quad + 2.$$

Изъ сего слѣдуетъ, что данное число 3252 состоитъ изъ $999 \times 3 + 66 \times 3 + 15 \times 3$ и остатковъ 3, 2, 5, 2. Въ каждомъ изъ первыхъ трехъ чиселъ 3 содержится цѣлое число разъ (§ 46); слѣд. и сумма оныхъ должна дѣлиться на 3 безъ остатка. Далѣе, поелику и сумма остатковъ дѣлится нацѣло на 3, то и все данное число должно дѣлиться на 3 безъ остатка; но упомянутые остатки выражаются тѣми же цифрами, какими и данное число; то изъ сего явствуетъ, что дѣлимость

даннаго числа на 3, зависитъ единственно отъ того, дѣлится ли сумма знаковъ онаго на 3.

Въ семъ примѣрѣ сумма цифръ, $3+2+5+2$, равная 12 дѣлится на 3; слѣд. и самое число дѣлится на 3; въ чемъ и можно увѣриться, раздѣливъ въ самомъ дѣлѣ:

```
3252 | 3
3    |1084
--
 25
 24
 --
  12
  12
  --
  ,,
```

III. Всякое число, большее сотни, дѣлится на 4, если послѣднія двѣ цифры, т. е., десятки съ единицами, дѣлятся на 4; ибо въ такомъ случаѣ данное число состоитъ изъ одной или нѣсколькихъ сотенъ, тысячъ, и т. д., и еще десятковъ и единицъ. 4 Единицы содержатся въ 1 сотнѣ ровно 25 разъ, посему должны заключаться въ каждомъ числѣ сотенъ безъ остатка; въ десяткахъ же съ единицами 4 заключаются безъ остатка по условію; посему на 4 должно дѣлиться и все число. На прим. 1464 дѣлится на 4, потому что 64 дѣлится на 4 безъ остатка.

IV. Всякое число дѣлится безъ остатка на 5, когда на мѣстѣ единицъ находится 0 или 5. Въ первомъ случаѣ данное число состоитъ изъ однихъ только десятковъ; поелику же 1 дес. дѣлится на 5 безъ остатка, то и все данное число должно дѣлиться на 5. Во второмъ случаѣ данное число состоитъ изъ десятковъ и 5 единицъ, и поелику каждая часть дѣлится на 5 безъ остатка, то и все число должно дѣлиться на 5 безъ остатка.

V. Всякое число дѣлится на 6, если дѣлится на 2 и на 3; потому что 2 раза 3, 6. И такъ всякое четное число, въ коемъ сумма знаковъ дѣлится на 3, дѣлится на 6 безъ остатка. На прим. число 4278 дѣлится на 6, потому что оно четное и сумма цифръ (21) дѣлится на 3.

VI. Всякое число большее 1000 дѣлится безъ остатка на 8, когда часть онаго, изображающаяся послѣдними тремя знаками, дѣлится на 8; ибо въ такомъ случаѣ данное число состоитъ изъ одной или нѣсколькихъ тысячъ, и еще сотенъ, десятковъ и единицъ; 8 единицъ заключаются въ 1000 точно 125 разъ, посему должны содержаться въ каждомъ числѣ тысячъ безъ остатка; въ сотняхъ же, десяткахъ и единицахъ, по самому усло-

вію, содержатся безъ остатка; а изъ сего слѣдуетъ, что и все таковое число дѣлится на 8 безъ остатка. По сему правилу 145,480 должно дѣлиться на 8, потому что 480 дѣлится на 8 безъ остатка.

VII. Всякое число дѣлится безъ остатка на 9, если сумма всѣхъ цифръ, оное изображающихъ, дѣлится на 9 безъ остатка. Сіе правило доказывается точно такъ, какъ правило дѣлимости чиселъ на 3. И такъ 1341 дѣлится на 9; ибо $1+3+4+1=9$, а 9 дѣлится на 9 безъ остатка.

§ 74. *Отъискиваніе общаго большаго дѣлителя.*

Въ предъидущемъ §. были показаны признаки, по которымъ можно узнать, дѣлятся ли числитель и знаменатель данныхъ дробей на первыя 9 чиселъ (исключая 7). Но сихъ правилъ недовольно, ибо нѣкоторыя числа, хотя не дѣлятся на первыя 9 чиселъ, но могутъ дѣлиться на большія числа. На пр. дробь $\frac{51}{85}$ можетъ быть сокращена на 17; раздѣливъ оба члена дроби (§ 71.) на сіе число, получится вмѣсто оной $\frac{3}{5}$. Изъ сего слѣдуетъ, что для сокращенія дробей нужно знать общій способъ находить общаго дѣлителя двухъ чиселъ.

Пусть будуть данныя числа 169 и 533.

Очевидно, что общій большій дѣлитель не можетъ быть болѣе меньшаго числа 169; 169 дѣлится само на себя безъ остатка; слѣд. если сіе число дѣлитъ другое число 533 безъ остатка, то оно должно быть не только общимъ, но и общимъ большимъ дѣлителемъ.

Раздѣливъ 533 на 169:

$$\begin{array}{r|l} 533 & 169 \\ \cline{2-2} 507 & 3 \\ \hline 26 & \end{array}$$

получимъ въ частномъ 3 и въ остаткѣ 26. И такъ 169 не будетъ общимъ дѣлителемъ, ибо 533 не дѣлится на оное число безъ остатка; слѣд. общій большій дѣлитель долженъ быть менѣе 169.

Выше было объяснено (§ 36), что дѣлитель, умноженный на частное и сложенный съ остаткомъ, составляетъ дѣлимое, т. е.,

$$533 = 169 \times 3 + 26.$$

И такъ искомое число должно быть общимъ большимъ дѣлителемъ 169 и $169 \times 3 + 26$.

Но если какое нибудь число дѣлитъ 169 безъ остатка, то оное должно и 169 взятое 3 раза раздѣлить безъ остатка (§ 46); если

же сіе число не раздѣлитъ 26 безъ остатка, то оное не раздѣлитъ и числа 169 взятаго 3 раза, сложеннаго съ 26, а посему и небудетъ общимъ дѣлителемъ 169 и $169 \times 3 + 26$; и такъ общіе дѣлители 169 и 533 должны быть также общими дѣлителями 169 и 26, а посему и *общій большій* дѣлитель 169 и 533 долженъ быть также *общимъ большимъ* дѣлителемъ 169 и 26. Общій большій дѣлитель 169 и 26 не можетъ быть болѣе меньшаго числа 26. 26 дѣлится само на себя, надлежитъ только узнать дѣлится ли 169 на 26.

$$\begin{array}{r|l} 169 & 26 \\ \cline{2-2} 156 & 6 \\ \hline 13 & \end{array}$$

Раздѣливъ 169 на 26 получимъ въ частномъ 6, и въ остаткѣ 13; и такъ 26 не будетъ общимъ дѣлителемъ 169 и 26, слѣд. и данныхъ двухъ чиселъ 533 и 169.

Изъ предъидущаго (§ 36) явствуетъ, что дѣлимое число $169 = 26 \times 6 + 13$. И такъ искомый общій дѣлитель 169 и 26, долженъ также быть общимъ дѣлителемъ 26 и $26 \times 6 + 13$. Но если какое нибудь число дѣлитъ 26, то оное должно дѣлить также и 26 взятое 6 разъ; если же сіе число не раздѣлитъ 13 безъ остатка, то оное не раздѣлитъ

также и $26 \times 6 + 13$, слѣд. и не будетъ общимъ дѣлителемъ 26 и $26 \times 6 + 13$ (или 169); и такъ общія дѣлители 26 и 169 должны быть общими дѣлителями 26 и 13; а посему и *общій большій* дѣлитель 169 и 533 долженъ быть также *общимъ дѣлителемъ* 26 и 13.

Общій большій дѣлитель 26 и 13 не можетъ быть болѣе 13. 13 дѣлится само на себя безъ остатка; и такъ остается только узнать дѣлится ли 26 на 13.

$$\begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ \cline{2-2} 26 & 2 \\ \hline ,, & \end{array}$$

Изъ послѣдняго дѣленія видимъ, что 26 дѣлится на 13 безъ остатка; и такъ 13 есть общій и вмѣстѣ общій большій дѣлитель 26 и 13.

Выше было выведено:

1. Общій большій дѣлитель 533 и 169 долженъ быть общимъ большимъ дѣлителемъ 169 и 26.

2. Общій большій дѣлитель 169 и 26 долженъ быть общимъ большимъ дѣлителемъ 26 и 13. Но общій большій дѣлитель 26 и 13 есть 13; слѣд. 13 есть общій большій дѣлитель данныхъ чиселъ.

Соединивъ всѣ сдѣланныя дѣленія, сіе дѣйствіе представится въ слѣдующемъ видѣ.

$$\begin{array}{r|l} 533 & 169 \\ 507 & 3 \\ \hline 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ 26 & 2 \\ \hline '' & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 169 & 26 \\ 156 & 6 \\ \hline 13 & \end{array}$$

Сіе самое дѣйствіе можетъ быть еще сокращено слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l} 533 & 169 \\ 507 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 169 & 26 \\ 156 & 6 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ 26 & 2 \\ \hline '' & \end{array}$$

Разрѣшивъ подобнымъ образомъ еще нѣсколько другихъ задачъ сего рода, можно вывести изъ оныхъ слѣдующее правило:

чтобъ найти общаго большаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ, должно сперва раздѣлить бо́льшее число на ме́ньшее, потомъ ме́ньшее на первый остатокъ, потомъ первый остатокъ на второй и т. д., пока не будетъ дѣленія безъ остатка; то послѣдній дѣлитель долженъ

быть общимъ большимъ дѣлителемъ данныхъ двухъ чиселъ.

§ 75. *Раздробленіе именованныхъ дробныхъ чиселъ.*

Въ § 72 было объяснено, что всякое дробное отвлеченное число можетъ быть представлено въ различныхъ видахъ, т. е., выражено въ меньшихъ и большихъ доляхъ, на прим. дробь $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, и таже равна $\frac{2}{3}$. Разсмотримъ, не можно ли подобной перемѣны сдѣлать и съ дробнымъ именованнымъ числомъ. Положимъ что требуется узнать сколько саженъ въ $\frac{4}{15}$ версты.

Въ § 65 было объяснено, что дробь $\frac{4}{15}$ можно разсматривать какъ пятнадцатую часть 4 единицъ; слѣд. чтобъ узнать сколько саженъ въ $\frac{4}{15}$ версты, надлежитъ сперва узнать сколько саженъ въ 4 верстахъ, и потомъ раздѣлить на 15.

```
  4 верст.
  500
 ─────
 2000 саж.  | 15
 15         |──────
 ──         | 133 ⅓ саж.
  50
  45
  ──
   50
   45
   ──
    5
```

слѣд. въ $\frac{4}{15}$ версты 133 $\frac{1}{3}$ саж.

Изъ сего примѣра явствуетъ, что *для приведенія дробнаго именованнаго числа въ число меньшаго наименованія, надлежитъ только числителя умножить на знаменательное число, и происшедшее произведеніе раздѣлить на знаменателя; найденное частное будетъ искомое число.*

§ 76. *Превращеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.*

Разсмотримъ еще превращеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

Положимъ что требуется превратить $\frac{3}{5}$ минуты въ часть часа, или узнать какую часть часа составляютъ $\frac{3}{5}$ одной минуты.

Поелику часъ болѣе минуты въ 60 разъ, то искомая часть часа, равняющаяся $\frac{3}{5}$ минуты, должна быть въ 60 разъ менѣе $\frac{3}{5}$; и такъ искомое число будетъ $\frac{3}{5\times60}$ (§ 70) $=\frac{3}{300}=\frac{1}{100}$ часа.

Изъ сего слѣдуетъ, что *для превращенія дробныхъ именованныхъ чиселъ надлежитъ только знаменателя умножить на знаменательное число.*

ГЛАВА II.

Сложеніе простыхъ дробей.

§ 77. *Сложеніе дробей съ одинакими знаменателями.*

Узнавъ важнѣйшія свойства дробей, можно приступить къ различнымъ родамъ вычисленій съ оными. Начнемъ со сложенія.

При сложеніи дробей могутъ быть два случая: во $1^{хъ}$, дроби могутъ имѣть одинакихъ знаменателей, и во $2^{хъ}$ разныхъ знаменателей.

I. Сложеніе дробей съ одинакими знаменателями весьма просто.

Положимъ, что требуется сложить дроби $\frac{4}{9}$ и $\frac{3}{9}$; поелику обѣ дроби выражены въ одинакихъ доляхъ, т. е., въ девятыхъ, то надлежитъ только число долей первой дроби сложить съ числомъ долей второй, и получится 7 девятыхъ ($\frac{7}{9}$). *И такъ для сложенія дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей должно сложить числителей данныхъ дробей, и подъ суммою подписать того же знаменателя* (для показанія изъ какихъ частей составлены дроби).

II. Если же дроби будутъ имѣть разныхъ знаменателей, то не можно поступать по вышеприведенному правилу, потому что дроби выражены въ разныхъ доляхъ. На прим., дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ не составятъ ни $\frac{2}{3}$ ни $\frac{2}{9}$. И такъ должно сперва выразить обѣ дроби въ одинакихъ доляхъ.

§ 78. *Приведеніе дробей къ одинакому знаменателю.*

Поелику дроби въ такомъ случаѣ выражены въ одинакихъ доляхъ, когда имѣютъ одинакихъ знаменателей (§ 69), то и надлежитъ даннымъ дробямъ, если требуется изобразить оныя въ одинакихъ доляхъ, дать такой видъ, чтобы онѣ имѣли одного и того же знаменателя. Дѣйствіе сіе называется *привсденіемъ дробей къ одному знаменателю.*

Положимъ, что требуется привести дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{5}$, къ одному знаменателю.

Если оба члена первой дроби, т. е., $\frac{3}{4}$ будутъ умножены на знаменателя второй, то величина оной не измѣнится (§ 71.), и знаменатель полученной дроби $\frac{15}{20}$ будетъ равенъ произведенію изъ обоихъ частныхъ знаменателей. Также если оба члена второй дроби умножатся на знаменателя первой, то величина оной не измѣнится, знаменатель же

полученной дроби $\frac{8}{20}$ будетъ также равенъ произведенію изъ обоихъ знаменателей; слѣд. такимъ образомъ полученныя дроби должны имѣть одинакихъ знаменателей, ибо (§ 28) произведеніе остается тоже, въ какомъ бы порядкѣ множители взяты ни были, и притомъ онѣ равны даннымъ дробямъ. И такъ, *чтобъ привести двѣ дроби къ одному знаменателю, надлежитъ числителя и знаменателя каждой дроби умножить на знаменателя другой дроби.*

Чтобы привести три дроби, или болѣе, къ одному знаменателю, должно, согласно съ выведеннымъ правиломъ, оба члена каждой дроби умножить на знаменателей прочихъ дробей; ибо въ такомъ случаѣ величина данныхъ дробей не измѣнится (§ 71), знаменатель же ихъ будетъ тотъ же, потому что равенъ произведенію изъ всѣхъ частныхъ знаменателей.

Привести дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ къ одному знаменателю.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 6}{3 \times 5 \times 6} = \frac{60}{90}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 6}{5 \times 3 \times 6} = \frac{72}{90}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3 \times 5}{6 \times 3 \times 5} = \frac{75}{90}.$$

§ 79.

Узнавъ какимъ образомъ приводятся дроби съ разными знаменателями къ одному, безъ всякаго затрудненія можемъ складывать оныя. Пусть требуется сложить: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

По приведеніи сихъ дробей къ одному знаменателю:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$

будетъ, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$; но $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$; слѣд. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

Другой примѣръ. Сложить $\frac{1}{5} + \frac{3}{7} + \frac{2}{9}$.

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 7 \times 9}{5 \times 7 \times 9} = \frac{63}{315}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 5 \times 9}{7 \times 5 \times 9} = \frac{135}{315}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 5 \times 7}{9 \times 5 \times 7} = \frac{70}{315}$$

И такъ: $\frac{1}{5} + \frac{3}{7} + \frac{2}{9} = \frac{63}{315} + \frac{135}{315} + \frac{70}{315} = \frac{268}{315}$.

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ, что *для сложенія дробей, имѣющихъ различныхъ знаменателей должно сперва привести оныя къ одному, и потомъ поступать какъ при сложеніи дробей съ одинакими наменателями.*

Иногда при сложеніи дробей получается неправильная дробь, то въ такомъ случаѣ изъ оной исключается цѣлое число.

Примѣры:

I. $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{12}{21} = \frac{26}{21} = 1\frac{5}{21}$

II. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7} = \frac{105}{140} + \frac{56}{140} + \frac{120}{140} = \frac{281}{140} = 2\frac{1}{140}$.

§ 80. *Сложеніе смѣшанныхъ чиселъ.*

Иногда требуется складывать цѣлыя числа съ дробями. Въ такихъ случаяхъ должно цѣлыя числа и дроби складывать отдѣльно; и если отъ сложенія дробей произойдетъ неправильная дробь, то исключивъ изъ нея цѣлое число, прибавить оное къ суммѣ цѣлыхъ чиселъ.

Примѣръ 1. Сложить $3\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5}$.

$$3\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} = 5\frac{3}{5}$$

Примѣръ 2. Сложить $5\frac{1}{3} + 7\frac{3}{7}$.

$$5\frac{1}{3} + 7\frac{3}{7} = 12\frac{1}{3} + \frac{3}{7} = 12\frac{7}{21} + \frac{9}{21} = 12\frac{16}{21}.$$

Примѣръ 3. $3\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+6\frac{4}{5}=16+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=$
$16+\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}=16+\frac{133}{60}=16+$
$2\frac{13}{60}=18\frac{13}{60}$.

Прим. 4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{11}{15}+\frac{9}{20}+\frac{23}{60}+\frac{13}{60}$, на основаніи § 71 будетъ:

$\frac{30}{60}+\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}+\frac{35}{60}+\frac{44}{60}+\frac{27}{60}+\frac{48}{60}+\frac{13}{60}=$
$\frac{378}{60}=\frac{63}{10}=6\frac{3}{10}$

§ 81. *Сложеніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.*

Если слагаемыя дробныя числа суть именованныя и одного наименованія, то съ оными поступаютъ совершенно по правиламъ сложенія дробей. Положимъ что требуется сложить $3\frac{1}{5}$ пуда и $2\frac{1}{4}$ пуда. Сложимъ сперва цѣлыя числа: 3 пуда и 2 пуда, 5 пудъ; потомъ $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$, получимъ (§ 79) $\frac{9}{20}$ пуда; слѣд. всего будетъ $5\frac{9}{20}$ пудъ.

Если слагаемыя дробныя числа суть именованныя и разнаго наименованія, то надлежитъ сперва привести оныя въ числа одного наименованія, и потомъ поступать по тѣмъ же правиламъ. Сложить $3\frac{1}{3}$ рубля, $20\frac{1}{4}$ коп. Приведя $3\frac{1}{3}$ рубля въ копѣйки, получимъ $300+\frac{100}{3}$ коп., или $333\frac{1}{3}$ коп.; но $333\frac{1}{3}+20\frac{1}{4}$ коп. $=353$ коп. $+\frac{1}{3}$ коп. $+\frac{1}{4}$ коп. $=353\frac{7}{12}$ коп; слѣд. сіе число будетъ искомая сумма.

ГЛАВА III.

Вычитаніе простыхъ дробей.

§ 82. *Вычитаніе дробей съ одинакими знаменателями.*

При вычитаніи дробей бываютъ также два случая, а именно: дроби могутъ имѣть одинакихъ и различныхъ знаменателей. Разсмотримъ первый случай.

Пусть требуется вычесть $\frac{3}{8}$ изъ $\frac{5}{8}$. Поелику въ вычитаемой дроби заключается 3 точно такихъ долей, какихъ въ уменьшаемой 5; то чтобъ найти остатокъ, надлежитъ только 3 доли отнять отъ 5 долей, и останется 2 такихъ же долей, т. е., осьмыхъ ($\frac{2}{8}$).

И такъ, *если требуется вычесть одну дробь изъ другой, имѣющей одинакого съ нею знаменателя, то должно вычесть числителя вычитаемой дроби изъ числителя уменьшаемой, и подъ остаткомъ подписать знаменателя* (для показанія величины частей дроби).

Примѣры: $\frac{8}{13} - \frac{2}{13} = \frac{6}{13}$

$\frac{17}{100} - \frac{3}{100} = \frac{14}{100}$,

§ 83. *Вычитаніе дробей съ разными знаменателями.*

Если дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то не можно вычитать числителя вычитаемой дроби изъ числителя уменьшаемой, потому что доли, въ которыхъ оныя выражены, не одинаковы. На пр. если изъ $\frac{2}{3}$ вычитается $\frac{1}{4}$, то не можетъ остаться ни $\frac{1}{3}$ и ни $\frac{1}{4}$.

Изъ сего слѣдуетъ, что сперва должно привести ихъ къ одному знаменателю, и потомъ уже можно поступать какъ при вычитаніи дробей, имѣющихъ одинакого знаменателя; слѣд.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.

И такъ при вычитаніи дробей съ разными знаменателями должно сперва привести оныя къ одному, и потомъ поступать какъ при вычитаніи дробей, имѣющихъ одинакихъ знаменателей.

§ 84. *Вычитаніе цѣлыхъ чиселъ съ дробями.*

Если уменьшаемое и вычитаемое числа заключаютъ въ себѣ цѣлыя числа съ дробями; то должно сперва вычесть дробь изъ дроби, а потомъ цѣлое число изъ цѣлаго.

Примѣръ 1. Изъ $7\frac{3}{8}$ вычесть $1\frac{2}{8}$

$$7\frac{3}{8} - 1\frac{2}{8} = 6\frac{1}{8}$$

Примѣръ 2. Изъ $7\frac{4}{9}$ вычесть $4\frac{3}{10}$.

$$7\frac{4}{9} - 3\frac{3}{10} = 4\frac{13}{90}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{3}{10} = \frac{40}{90} - \frac{27}{90} = \frac{13}{90}$$

Примѣръ 3. Изъ 8 вычесть $4\frac{5}{7}$.

Поелику въ уменьшаемомъ числѣ нѣтъ дроби, то должно отъ 8 единицъ отнять единицу, и обратить оную въ дробь, имѣющую знаменателемъ (семь) число, равное знаменателю вычитаемой дроби, потомъ изъ оной вычесть вычитаемую дробь, и наконецъ отъ цѣлаго числа, уменьшеннаго единицею отнять цѣлое число, находящееся въ вычитаемомъ.

$$8 - 4\frac{5}{7} = 7 + 1 - 4\frac{5}{7} = 7 + \frac{7}{7} - 4\frac{5}{7} = 3\frac{2}{7}.$$

Примѣръ 4. Изъ $7\frac{2}{9}$ вычесть $3\frac{3}{4}$.

$$7\frac{2}{9} - 3\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{9} - \frac{3}{4} = \frac{8}{36} - \frac{27}{36}.$$

Въ семъ примѣрѣ вычитаемая дробь болѣе уменьшаемой, и посему должно отъ уменьшаемаго числа занять одну единицу, и приведя оную также въ 36 доли, придать къ уменьшаемой дроби, и потомъ поступать по извѣстнымъ уже правиламъ.

$$\frac{36}{36} + \frac{8}{36} - \frac{27}{36} = \frac{44}{36} - \frac{27}{36} = \frac{17}{36};$$

слѣд. $7\frac{2}{9} - 3\frac{3}{4} = 3\frac{17}{36}$.

§ 85. *Вычитаніе дробныхъ именованныхъ чиселъ.*

Если уменьшаемое и вычитаемое числа суть именованныя и одного наименованія; то съ оными поступаютъ точно такъ, какъ при вычитаніи дробныхъ чиселъ.

Примѣръ. Отъ $8\frac{1}{2}$ ведеръ отнять $3\frac{3}{10}$ ведра. $8\frac{1}{2}$ в. — $3\frac{3}{10}$ в. = $5\frac{1}{2}$ в. — $\frac{3}{10}$ в. = $5\frac{5}{10}$ в. — $\frac{3}{10}$ в. = $5\frac{2}{10}$ или $5\frac{1}{5}$ ведрамъ.

Если уменьшаемое и вычитаемое числа суть именованныя, и разнаго наименованія, но принадлежащія къ одному роду; то надлежитъ сперва привести оныя къ одному наименованію, и потомъ поступать какъ въ предъидущемъ случаѣ.

Примѣръ. Отъ $2\frac{2}{3}$ лота отнять $1\frac{3}{6}$ зол. $2\frac{2}{3}$ лота — $1\frac{3}{6}$ золот. = 2 лот. 2 зол. — $1\frac{3}{6}$ зол. = 2 лот. и $\frac{3}{6}$ золотника.

ГЛАВА IV.

Умноженіе простыхъ дробей.

При умноженіи дробей могутъ быть три случая: I. умноженіе дроби на цѣлое число; II. умноженіе цѣлаго числа на дробь, и III. умноженіе дроби на дробь.

§ 86. *Умноженіе дроби на цѣлое число.*

Пусть требуется умножить дробь $\frac{3}{8}$ на цѣлое число 4. Умножить $\frac{3}{8}$ на 4 значитъ: взять дробь $\frac{3}{8}$ четыре раза, или увеличить ее въ 4 раза. Дробь же увеличивается въ 4 раза (§ 70. I), когда ея числитель умножится на 4. И такъ $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{12}{8} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.

Намъ извѣстно, что дробь еще (§ 70. IV) увеличивается, когда знаменатель ея раздѣлится; посему можно произвести упомянутое умноженіе дроби на 4, раздѣливъ ея знаменателя на 4; слѣд. $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8 : 4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

И такъ *для умноженія дроби на цѣлое число должно: I. числителя умножить на множителя, и подъ произведеніемъ подписать знаменателя данной дроби, или II. знаменателя раздѣлить на даннаго множителя, и найденное число сдѣлать знаменателемъ, оставивъ того же самаго числителя.*

Примѣчаніе. Второй способъ рѣшенія можетъ и долженъ быть употребляемъ только въ такихъ случаяхъ, когда знаменатель дѣлится на даннаго множителя безъ остатка.

§ 87. *Умноженіе цѣлаго числа на дробь.*

Умножить цѣлое число 5 на дробь $\frac{2}{7}$. Дробь $\frac{2}{7}$ можно разсматривать какъ частное происшедшее отъ дѣленія 2 единицъ на 7 (§ 65); посему, если умножимъ 5 на 2, то полученное произведеніе 10 будетъ въ 7 разъ болѣе настоящаго, потому что множитель 2 болѣе даннаго множителя $\frac{2}{7}$ въ 7 разъ; и такъ, чтобъ получить настоящее произведеніе, должно раздѣлить 10 на 7, слѣд. оное должно быть равно $\frac{10}{7}$.

А изъ сего слѣдуетъ, что *для умноженія цѣлаго числа на дробь должно цѣлое число умножить на числителя, и произведеніе раздѣлить на знаменателя.*

Сіе правило умноженія цѣлаго числа на дробь можно вывести еще слѣдующимъ образомъ: положимъ что требуется умножить 5 на $\frac{2}{7}$. Умножить вообще значитъ (§ 26): взять множимое число, столько разъ, сколько во множителѣ заключается единицъ; и такъ умножить 5 на $\frac{2}{7}$ значитъ: взять 5 столько разъ, сколько въ $\frac{2}{7}$ заключается единицъ; но въ $\frac{2}{7}$ не содержится ни одной единицы, посему число 5 не берется ни одного раза; и какъ въ дроби $\frac{2}{7}$ содержится дважды взятая $\frac{1}{7}$ доля единицы, то и слѣдуетъ взять только двѣ седьмыхъ

даннаго множимаго числа. Одна седьмая часть пяти единицъ будетъ равна $\frac{5}{7}$ одной единицы; слѣд. двѣ седьмыхъ тогоже числа составятъ вдвое большее число $\frac{5 \times 2}{7}$ или $\frac{10}{7}$. Изъ сего рѣшенія выводится тоже правило для умноженія цѣлаго числа на дробь, т. е., должно цѣлое число раздѣлить на знаменателя, и частное умножить на числителя.

Примѣры:

$7 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$
$8 \times \frac{3}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
$18 \times \frac{7}{9} = \frac{126}{9} = 14.$

Послѣднее умноженіе можно сдѣлать удобнѣйшимъ образомъ, припомнивъ, что получается одинъ и тотъ же выводъ (§ 43), въ какомъ бы порядкѣ дѣйствія умноженія и дѣленія ни были произведены. Чтобъ умножить 18 на $\frac{7}{9}$ должно 18 умножить на 7, и потомъ раздѣлить на 9; для облегченія же можно сперва раздѣлить 18 на 9, потомъ найденное частное 2 умножить на 7, и получится искомое произведеніе 14. Очевидно, что сей последній способъ рѣшенія можетъ быть употребленъ только въ такомъ случаѣ, когда множимое число дѣлится на знаменателя множителя.

Примѣчаніе. При умноженіи цѣлаго числа на дробь, произведеніе всегда должно быть менѣе множимаго, если множителемъ будетъ *правильная* дробь; ибо въ такомъ случаѣ множимое не берется цѣлый разъ, но только часть онаго должна быть взята, и именно такая часть, какая означается дробнымъ множителемъ. На примѣръ, чтобъ умножить 27 на $\frac{2}{3}$, должно взять онаго числа только $\frac{2}{3}$; и изъ сего явствуетъ, почему произведеніе должно быть менѣе множимаго. $\frac{1}{3}$ двадцати семи будетъ 9; слѣд. $\frac{2}{3}$ даннаго числа равны 18; и такъ $27 \times \frac{2}{3} = 18$. Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что слово *умножить* не всегда значитъ *увеличить*.

§ 88. *Умноженіе дроби на дробь.*

Теперь слѣдуетъ показать правило умноженія дроби на дробь. Положимъ, что требуется найти произведеніе изъ $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$.

Сіе умноженіе можетъ быть также сдѣлано двоякимъ образомъ:

I. Чтобъ найти произведеніе изъ $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$, умножимъ сперва $\frac{2}{5}$ на 3. Происшедшее произведеніе $\frac{2 \times 3}{5}$ должно быть болѣе настоящаго въ 4 раза, потому что множитель увеличенъ въ 4 раза (§ 44); и такъ, чтобъ найти настоящее произведеніе, должно $\frac{2 \times 3}{5}$ уменьшить

въ 4 раза; дробь же уменьшается, когда ея знаменатель будетъ умноженъ; слѣд. должно знаменателя 5 дроби $\frac{2\times3}{5}$ умножить на 4, и получится искомое произведеніе $\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{6}{20}$. Изъ сего слѣдуетъ, *что для умноженія дроби на дробь надлежитъ произведеніе изъ числителей раздѣлить на произведеніе изъ знаменателей.*

II. Умножить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{4}$ значитъ: взять $\frac{3}{4}$ отъ $\frac{2}{5}$; чтобъ найти $\frac{1}{4}$ отъ $\frac{2}{5}$ надобно дробь $\frac{2}{5}$ уменьшить въ 4 раза; а чтобъ уменьшить дробь въ 4 раза должно знаменателя 5 умножить на 4 (§ 70. II), и получится дробь $\frac{2}{20}$; если четвертая часть двухъ пятыхъ равна $\frac{2}{20}$; то три четверти $\frac{2}{5}$ будутъ въ 3 раза болѣе $\frac{2}{20}$, т. е., $\frac{6}{20}$. И изъ сего рѣшенія можно вывести тоже самое слѣдствіе: для умноженія дроби на дробь надлежитъ произведеніе изъ числителей раздѣлить на произведеніе изъ знаменателей.

§ 89. *Умноженіе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ.*

При умноженіи цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ могутъ быть три случая:

I. Умноженіе смѣшаннаго числа на цѣлое.

II. Умноженіе цѣлаго числа на смѣшанное.

III. Умноженіе смѣшаннаго на смѣшанное.

1ый *Случай.* Умножить смѣшанное число $8\frac{2}{5}$ на цѣлое число 6. Чтобъ умножить $8\frac{2}{5}$ на 6, должно каждую часть онаго, т. е., цѣлое число 8 и дробь $\frac{2}{5}$ умножить на 6, и тогда получимъ: $8\frac{2}{5} \times 6 = 48 + \frac{12}{5} = 48 + 2\frac{2}{5} = 50\frac{2}{5}$.

2ый *Случай.* Умножить цѣлое число 7 на смѣшанное число $6\frac{2}{3}$.

При семъ умноженіи должно поступать точно такъ какъ и въ первомъ случаѣ, т. е., надлежитъ 7 умножить сперва на 6, потомъ на $\frac{2}{3}$:

$$7 \times 6\frac{2}{3} = 42 + \frac{14}{3} = 42 + 4\frac{2}{3} = 46\frac{2}{3}.$$

3ій *Случай.* Умножить смѣшанное число $4\frac{2}{3}$ на смѣшанное же число $2\frac{1}{5}$.

Чтобъ рѣшить сію задачу, надлежитъ только привести оба числа (§ 69) въ неправильныя дроби, и потомъ поступать какъ при умноженіи дроби на дробь (§ 88).

$$5\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{5} = \frac{14}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{14 \times 11}{3 \times 5} = \frac{154}{15} = 10\frac{4}{15}.$$

Чтобъ умножить смѣшанное число на дробь, или обратно, должно смѣшанное число привести въ неправильную дробь, и потомъ поступать какъ въ § 88 показано.

§ 90. *Умноженіе дробныхъ именованныхъ чиселъ.*

Если множимое число именованное, то надлежитъ поступать точно такъ какъ при

умноженіи простыхъ дробныхъ чиселъ и умноженіи именованныхъ.

Примѣръ. Умножить 8 дестей $4\frac{3}{4}$ листа на 5.

8 дест. $4\frac{3}{4}$ листа
$\times$ 5

40 —— $23\frac{3}{4}$ ——

$4\frac{3}{4}$ лист. $\times 5 = 20\frac{15}{4} = 23\frac{3}{4}$ листамъ.
8 дестей $\times 5 = 40$ дестямъ.

Умноженіе именованныхъ чиселъ на простыя дробныя числа, основано на тѣхъ же правилахъ. На примѣръ, умножить 5 час. и 40 мин. на $\frac{2}{5}$ значитъ: взять онаго числа двѣ пятыхъ; а чтобъ получить двѣ пятыхъ, надобно умножить на 2, и потомъ раздѣлить на 5. Дѣйствіе сіе представляется въ слѣдующемъ видѣ:

5 час. 40 мин.
2
11 час. 20 мин. | 5
10 | 2 час. 16 мин.
1
$\times$ 60
60 мин.
$+$ 20
80
5
30
30
,,

Если множитель смѣшанное число, то надлежитъ оное (§ 69) сперва обратить въ неправильную дробь, и потомъ поступать по предъидущему примѣру.

ГЛАВА V.

ДѢЛЕНІЕ ПРОСТЫХЪ ДРОБЕЙ.

При дѣленіи дробей могутъ быть также три случая: I. дѣленіе дроби на цѣлое число; II. дѣленіе цѣлаго числа на дробь; III. дѣленіе дроби на дробь.

§ 91. *Дѣленіе дроби на цѣлое число.*

Раздѣлить дробь $\frac{12}{25}$ на 6 значитъ: уменьшить ее въ 6 разъ; а чтобъ уменьшить дробь въ 6 разъ должно ея знаменателя умножить на 6, оставивъ того же числителя (§ 70. II.); и такъ искомое частное будетъ $\frac{12}{25\times6}=\frac{12}{150}=\frac{2}{25}$.

Дробь можетъ быть уменьшена еще другимъ образомъ, а именно раздѣливъ ея числителя на дѣлителя (§ 70. III.); въ такомъ случаѣ искомое частное будетъ $\frac{12:6}{25}=\frac{2}{25}$.

Изъ сего слѣдуетъ, что для дѣленія дроби на цѣлое число должно: I. *умножить ея знаменателя на дѣлителя, оставивъ того же числителя*, или II. *раздѣлить, если можно, ея числителя, оставивъ того же знаменателя.*

Примѣры: $\frac{6}{7}$: $8 = \frac{6}{56}$; $\frac{48}{93}$: $8 = \frac{6}{93}$; $\frac{24}{53}$: $12 = \frac{2}{53}$.

§ 92. *Дѣленіе цѣлаго числа на дробь.*

Раздѣлить цѣлое число 7 на дробь $\frac{2}{5}$.

Дѣленіе, какъ было объяснено въ § 37, есть такое дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, сколько разъ дѣлитель заключается въ дѣлимомъ. И такъ чтобъ раздѣлить 7 на $\frac{2}{5}$ должно найти, сколько разъ $\frac{2}{5}$ содержатся въ 7 единицахъ. Поелику $\frac{1}{5}$ содержится въ 1 единицѣ 5 разъ, а въ 7 единицахъ 5×7 (35) разъ; то $\frac{2}{5}$, будучи вдвое болѣе $\frac{1}{5}$, должны заключаться въ 2 раза менѣе, т. е., $\frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ разъ.

Изъ сего примѣра можно вывести слѣдующее правило: *при дѣленіи цѣлаго числа на дробь, должно цѣлое число умножить на знаменателя, и произведеніе раздѣлить на числителя.*

Но въ § 43 было объяснено, что получается одинъ и тотъ же выводъ, въ какомъ бы порядкѣ дѣйствія произведены ни были, по-

сему при дѣленіи цѣлаго числа на дробь можно сперва раздѣлить оное на числителя, и потомъ частное умножить на знаменателя. Сей родъ рѣшенія удобнѣе въ томъ случаѣ, когда дѣлимое дѣлится на числителя.

Примѣръ. Раздѣлить 18 на $\frac{6}{17} = \frac{18 \times 17}{6} = 3 \times 17 = 51$.

Вышеприведенное правило для дѣленія цѣлаго числа на дробь, можно доказать еще слѣдующимъ образомъ: чтобъ раздѣлить цѣлое число 7 на дробь $\frac{2}{5}$, раздѣлимъ 7 на числителя 2, и получимъ въ частномъ $\frac{7}{2}$ (или $3\frac{1}{2}$); но сіе частное должно быть менѣе настоящаго, потому что дѣлитель 2 болѣе настоящаго дѣлителя $\frac{2}{5}$; и какъ 2 болѣе $\frac{2}{5}$ въ 5 разъ, то и найденное частное $\frac{7}{2}$ менѣе настоящаго въ 5 разъ; слѣд. искомое частное будетъ равно $\frac{7}{2}$ умноженнымъ на 5, или $\frac{7 \times 5}{2}$.

И такъ, для дѣленія цѣлаго числа на дробь, должно цѣлое число умножить на знаменателя, и потомъ произведеніе раздѣлить на числителя.

§ 93. *Дѣленіе дроби на дробь.*

Чтобъ раздѣлить какую нибудь дробь $\frac{2}{3}$ на $\frac{3}{8}$ должно также узнать, сколько разъ $\frac{3}{8}$ содержатся въ $\frac{2}{3}$. Поелику данныя дроби изоб-

ражены въ разныхъ частяхъ единицы, то не удобно ихъ сравнивать; и такъ надлежитъ сперва привести ихъ къ одному знаменателю. Сдѣлавъ сіе, дѣлимое будетъ $\frac{16}{40}$, а дѣлитель $\frac{15}{40}$; $\frac{1}{40}$ содержится въ $\frac{16}{40}$, 16 разъ; посему дробь $\frac{15}{40}$, которая болѣе $\frac{1}{40}$ въ 15 разъ, должна содержаться въ томъ же дѣлимомъ 15 разъ менѣе, т. е., $\frac{16}{15}$ или $1\frac{1}{15}$ разъ. Дѣйствіе сіе представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{8}$$

$$\frac{16}{40} : \frac{15}{40} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Другое рѣшеніе. Чтобъ раздѣлить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{8}$: раздѣлимъ сперва $\frac{2}{5}$ на 3, и получимъ (§ 70. II) $\frac{2}{5 \times 3}$ ($\frac{2}{15}$); но сіе частное менѣе настоящаго, потому что принятый дѣлитель 3 болѣе настоящаго дѣлителя $\frac{3}{8}$; и какъ 3 болѣе $\frac{3}{8}$ въ 8 разъ, то и найденное частное менѣе настоящаго въ 8 разъ; и такъ чтобъ найти сіе послѣднее, надлежитъ $\frac{2}{5 \times 3}$ умножить на 8; слѣд. искомое частное равно (§ 70. I) $\frac{2 \times 8}{5 \times 3}$ $= \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$.

Изъ сихъ двухъ рѣшеній можно вывести слѣдующее правило: *при дѣленіи дроби на дробь, должно произведеніе изъ числителя дѣлимой дроби и знаменателя дѣ-*

лящей, раздѣлить на произведеніе изъ знаменателя дѣлимой и числителя дѣлящей.

Примѣры:

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 3} = \tfrac{14}{9} = 1\tfrac{5}{9}$$

$$\tfrac{7}{12} : \tfrac{4}{12} = \tfrac{7}{4} = 1\tfrac{3}{4}.$$

§ 94. *Дѣленіе цѣлыхъ и смѣшанныхъ чиселъ.*

Чтобъ раздѣлить смѣшанное число на цѣлое, или цѣлое на смѣшанное, надлежитъ смѣшанныя числа привести въ неправильныя дроби, и потомъ поступать по предъидущимъ параграфамъ.

Примѣры:

I. $3\tfrac{1}{3} : 7 = \tfrac{10}{3} : 7 = \tfrac{10}{21}$ (§ 91.)
II. $4\tfrac{1}{2} : 9 = \tfrac{9}{2} : 9 = \tfrac{1}{2}$ (§ 91.)
III. $7 : 1\tfrac{1}{5} = 7 : \tfrac{6}{5} = \tfrac{35}{6} = 5\tfrac{5}{6}$ (§ 92.)
IV. $9 : 1\tfrac{1}{2} = 9 : \tfrac{3}{2} = 3 \times 2 = 6$ (§ 92.)
V. $7\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{7} = \tfrac{15}{2} : \tfrac{8}{7} = \tfrac{105}{16} = 6\tfrac{9}{16}$ (§ 93.)
VI. $4\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{2} : \tfrac{9}{8} = \tfrac{8}{2} = 4$ (§ 93.)

§ 95. *Дѣленіе именованныхъ чиселъ.*

Чтобъ раздѣлить именованное число на простую дробь, надлежитъ (по § 91.) оное умножить на знаменателя, и происшедшее

отъ того произведеніе раздѣлить на числителя.

Примѣръ. 40 саж. и 2 арш. раздѣлить на $\frac{3}{7}$.

40 саж. 2 арш.

× 7

284 саж. 2 арш. | 3

94 саж. $2\frac{2}{3}$ аршина.

27

14

12

2 саж.

× 3

6 арш.

× 2

8 арш.

6

2

Если оба числа суть дробныя и именованныя, то надлежитъ сперва привесть ихъ въ числа одного наименованія, и потомъ поступать какъ выше показано. На примѣръ, чтобъ раздѣлить $1\frac{1}{2}$ сажени на $1\frac{1}{4}$ фута, должно сперва $1\frac{1}{2}$ саж. привести въ футы. Умноживъ оное число на знаменательное число 7, найдемъ, что въ $1\frac{1}{2}$ саж. $10\frac{1}{2}$ футовъ. Раздѣливъ $10\frac{1}{2}$ фут. на $1\frac{1}{4}$, получимъ искомое частное $8\frac{2}{5}$.

О десятичныхъ дробяхъ.

ГЛАВА VI.

Предварительныя объясненія.

§ 96. *Опредѣленіе десятичныхъ дробей.*

Находится еще особенный родъ дробей, которыя имѣютъ знаменателемъ число 10, или степень изъ 10 (т. е., произведеніе, состоящее изъ двухъ или болѣе множителей, изъ коихъ каждый равенъ 10; на примѣръ, 10×10 или сто, 10×10×10 или 1000, и проч.); и таковыя дроби называются *десятичными.* И такъ дроби $\frac{8}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{127}{1000}$ суть десятичныя.

Очевидно, что оныя могутъ быть слагаемы, вычитаемы, умножаемы и дѣлимы точно такъ какъ простыя дроби, потому что правила, нами найденныя, суть общія; но для десятичныхъ дробей можно вывести нѣкоторыя частныя правила, служащія для сокращенія и

облегченія всѣхъ дѣйствій. Сіи сокращенія и облегченія основаны на удобнѣйшемъ способѣ изображенія десятичныхъ дробей, и по сей причинѣ должны быть сперва изложены правила счисленія (нумераціи) оныхъ.

§ 97. *Счисленіе десятичныхъ дробей.*

I. Въ счисленіи цѣлыхъ чиселъ было объяснено, что значеніе каждой цифры въ 10 разъ менѣе значенія цифры, стоящей подлѣ оной по лѣвую сторону. На прим., въ числѣ 111 первая цифра съ лѣвой стороны означаетъ 1 сотню, вторая 1 десятокъ, и т. д.

Поставимъ послѣ упомянутаго числа 111 какой нибудь знакъ, на примѣръ запятую, и напишемъ еще нѣсколько цифръ:

111,111.

По принятому условію, значеніе первой цифры послѣ запятой должно быть въ 10 разъ менѣе единицы; слѣд. цифра сія означаетъ десятыя доли единицы. Вторая цифра, имѣющая еще въ десять разъ меньшее значеніе, должна означать десятыя доли одной десятой, или сотыя доли единицы, и т. д. И такъ вышенаписанныя цифры:

111,111 означаютъ 1 сотню, 1 десятокъ, 1 единицу, 1 десятую, 1 сотую и 1 тысячную. И какъ въ 1 десятой 100 тысячныхъ,

въ 1 сотой 10 тысячныхъ; то число, изображенное вышенаписанными знаками будетъ: 111 единицъ и 111 тысячныхъ единицы.

Возмемъ еще одинъ примѣръ: 2,1045.

Цифра 2 означаетъ 2 единицы, цифра 1 одну десятую; цифра 4 четыре тысячныхъ; цифра 5 пять десятитысячныхъ. Сложивъ дроби:

$$\frac{1}{10}+\frac{4}{1000}+\frac{5}{10000}=\frac{1000}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{5}{10000}=\frac{1045}{10000},$$

получимъ 1045 десятитысячныхъ; слѣд. число, изображенное вышенаписанными знаками, будетъ: 2 единицы и 1045 десятитысячныхъ.

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ:

I. *Десятичныя дроби могутъ быть изобраажемы безъ знаменателя, который подразумѣвается.*

II. *Величина долей, въ коихъ изображается десятичная дробь, зависитъ отъ числа цифръ. Если въ десятичной дроби одна цифра, то она изображена въ десятыхъ доляхъ; если двѣ, въ сотыхъ; если три, въ тысячныхъ* и т. д.

III. *Цифры, стоящія по правую сторону запятой, отдѣляющей цѣлое число отъ дроби, составляютъ числителя десятичной дроби, а подразумѣваемый зна-*

менатель состоитъ изъ 1, сопровождаемой столькими нулями, сколько находится цифръ въ числителѣ.

Таковы правила для выговариванія данныхъ десятичныхъ дробей, изображаемыхъ безъ знаменателя. Правила для изображенія десятичныхъ дробей безъ знаменателя основаны на тѣхъ же началахъ.

II. Положимъ, что требуется изобразить цѣлое число съ дробью, на прим. $3\frac{23}{100}$, безъ знаменателя. Поелику данное число состоитъ изъ 3 единицъ, то надлежитъ сперва написать цифру 3, и подлѣ оной поставить запятую. Дробь $\frac{23}{100}$ состоитъ изъ $\frac{20}{100}+\frac{3}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$. Изъ сего слѣдуетъ, что послѣ запятой надлежитъ на первомъ мѣстѣ написать цифру 2, а на второмъ 3; слѣд. данное число изобразится такъ: 3, 23.

Примѣръ 2. Изобразить $\frac{83}{1000}$ безъ знаменателя.

Поелику въ данномъ числѣ единицъ не имѣется, то пишется 0 и подлѣ него ставится запятая. Дробь $\frac{83}{1000}=\frac{80}{1000}+\frac{3}{1000}=\frac{8}{100}+\frac{3}{1000}$. Поелику въ данной дроби десятыхъ не заключается, то ставится 0 на первомъ мѣстѣ подлѣ запятой, потомъ цифра 8 на мѣстѣ сотыхъ, и 3 на мѣстѣ тысячныхъ. И такъ $\frac{83}{1000}=0,083$.

Примѣръ 3. Изобразить $\frac{3}{1000}$ безъ знаменателя.

Данная дробь $\frac{3}{1000}$ не заключаетъ въ себѣ ни единицъ, ни десятыхъ, ни сотыхъ, слѣд. $\frac{3}{1000} = 0,003$.

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ:

I. *Въ десятичной дроби должно быть столько знаковъ, сколько заключается нулей въ знаменателѣ данной дроби.*

II. *Чтобъ написать данную десятичную дробь безъ знаменателя, надлежитъ только послѣ запятой написать числителя, если числитель изображается столькими же знаками, сколько находится нулей въ знаменателѣ.*

III. *Если же для изображенія числителя потребно менѣе знаковъ, нежели сколько находится нулей въ знаменателѣ, то слѣдуетъ послѣ запятой поставить столько нулей, чтобъ число оныхъ вмѣстѣ съ числомъ знаковъ числителя было равно числу нулей, находящихся въ знаменателѣ.*

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что чрезъ прибавленіе одного или нѣсколькихъ нулей съ правой стороны къ десятичной дроби, перемѣняется только видъ оной, а величина остает-

ся таже; ибо во сколько разъ увеличится числитель, во столько же увеличится и подразумѣваемый знаменатель, на прим. 3,207 = 3,2070 = 3,20700; ибо $3\frac{20700}{100000}$ (по сокращеніи на 10) = $3\frac{2070}{10000}$ (а по сокращеніи на 100) = $3\frac{207}{1000}$.

§ 98. *Объ измѣненіи величины десятичныхъ дробей.*

Поелику значеніе десятичныхъ цифръ зависитъ отъ мѣста, ими занимаемаго, то съ перемѣною мѣста запятой, перемѣняется и величина всего числа: на примѣръ, если въ числѣ 4,27 переставить запятую и написать послѣ цифры 2, то вмѣсто 4,27 получится число 42,7, въ которомъ значеніе каждой цифры иное.

I. Если въ десятичной дроби, или цѣломъ числѣ съ десятичною дробью, на прим. въ 0,41 переставится запятая на одинъ знакъ вправо, то значеніе каждой цифры увеличится въ 10 разъ. Въ данной дроби цифра 4 означаетъ десятыя доли, а въ полученномъ числѣ (4,1) цифра 4 означаетъ единицы; слѣд. имѣетъ въ 10 разъ большее значеніе. Тоже самое можно сказать и о другой цифрѣ; а изъ сего слѣдуетъ, что и вся дробь увеличилась въ 10 разъ.

Если въ десятичной дроби, или цѣломъ числѣ съ десятичною дробью, на прим: въ

42,7256 запятая переставится чрез 2 знака, то число увеличится во 100 разъ потому что значеніе каждой цифры увеличится во 100 разъ; и такъ 4272,56 = 42,7256 × 100.

Если запятая переставится чрез 3 знака вправо, то число увеличится въ 1000 разъ и т. д.

И такъ, чтобъ увеличить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью въ 10, 100, 1000 *разъ, и т. д., должно перенести запятую вправо на* 1, 2, 3 *знака и т. д., т. е., на столько знаковъ, сколько во множителѣ находится нулей послѣ* 1.

Примѣчаніе. Пусть будетъ 0, 8 данная десятичная дробь. Если отбросимъ запятую, то произведемъ такую же перемѣну, какая происходитъ при перенесеніи оной на одинъ знакъ вправо, т. е., если поставимъ оную послѣ цифры 8, ибо въ такомъ случаѣ десятичныхъ знаковъ небудетъ; перенесеніемъ же запятой на одну цифру вправо, дробь увеличивается въ 10 разъ; слѣд. отбросивъ запятую въ данной дроби, увеличимъ оную въ 10 разъ.

Подобнымъ же образомъ можно объяснить, что если въ десятичной дроби 0,72 отбросимъ запятую, то она увеличится во 100 разъ.

Итакъ вообще, при отбрасываніи запятой, десятичная дробь увеличивается, и увеличивается соразмѣрно числу знаковъ въ дроби. Если въ оной находится 1 знакъ, то увеличивается въ 10 разъ, если 2 знака во 100 разъ и т. д.

II. До сихъ поръ мы переставливали запятую вправо; теперь разсмотримъ, какая перемѣна должна произойти отъ переставовленія оной влѣво. Пусть будетъ 0,217 данная десятичная дробь. Если переставимъ запятую на одну цифру влѣво, т. е., поставимъ передъ 0; то значеніе каждой цыфры уменьшится въ 10 разъ; а посему и самая дробь уменьшится въ 10 разъ.

И такъ, чтобъ уменьшить данную дробь въ 10 разъ, должно запятую переставить на 1 знакъ влѣво, и написать передъ запятою 0, для означенія, что цѣлыхъ не находится; слѣд. дробь, въ 10 разъ меньшая данной, будетъ: 0,0217.

Если же въ какой нибудь десятичной дроби переставить запятую влѣво чрезъ 2 знака, то она уменьшится во 100 разъ, потому что значеніе каждой цифры уменьшится во 100 разъ.

И такъ, чтобъ уменьшить десятичную дробь во 100 разъ, должно переставить запятую чрезъ 2 знака влѣво. Если въ данной дроби столько знаковъ не имѣется, то надлежитъ добавить нулями, сверхъ сего поставить еще 0 для означенія, что единицъ не находится: на прим. если уменьшимъ 0,025 во 100 разъ, то получимъ 0,00025.

Если десятичная дробь соединена съ цѣлымъ числомъ, то происходитъ таковая же перемѣна.

И такъ, чтобы уменьшить десятичную дробь, или цѣлое число съ десятичною дробью въ 10, 100, 1000, разъ, и т. д., должно переставить запятую влѣво на 1, 2, 3 и т. д. знаковъ, т. е., на столько знаковъ, сколько въ дѣлителѣ находится нулей.

Если въ данной дроби не имѣется столько знаковъ, то добавляется нулями, и потомъ ставится еще 0, для означенія, что цѣлаго числа не находится.

Чтобъ уменьшить цѣлое число въ 10, 100, 1000, разъ и т. д., надлежитъ только, основываясь на предъидущемъ, поставить запятую послѣ 1го, 2го, 3го знака и т. д.,

шакомъ случаѣ значеніе каждой цифры, а посему и самое число уменьшится въ 10, 100, 1000 разъ и т. д.

Примѣры:

$$14249 : 10 = 1424,9$$

$$14249 : 100 = 142,49$$

$$14249 : 1000 = 14,249$$

ГЛАВА VI.

Четыре дѣйствія десятичныхъ дробей.

§ 99. *Сложеніе десятичныхъ дробей.*

Чтобъ сложить нѣсколько десятичныхъ дробей, соединенныхъ съ цѣлыми числами, надлежитъ оныя подписать одно подъ другимъ, какъ показано при сложеніи цѣлыхъ чиселъ, т. е., единицы подъ единицами, десятыя подъ десятыми, сотыя подъ сотыми и т. д. Пусть требуется сложить: $4,37 + 0,2 + 5,81$.

Подписавъ, какъ выше сказано:

$$\begin{array}{r} 4,37 \\ 0,2 \\ 5,81 \\ \hline 10,38 \end{array}$$

должно начать сложеніе съ единицъ наименьшаго разряда, въ семъ примѣрѣ, съ сотыхъ. 7 сотыхъ и 1 сотая, 8 сотыхъ; пишу 8 подъ сотыми; 3 десятыхъ, 2 десят. и 8 десят. 13 десятыхъ. Въ 13 десятыхъ заключается 1 единица и еще 3 десятыхъ; пишу 3 подъ десятыми, а 1 прикладываю къ единицамъ. 1 ед. и 4 ед., 5 единицъ, и еще 5 единицъ, 10 единицъ или 1 десятокъ; пишу 0 на мѣстѣ единицъ, а 1 на мѣстѣ десятковъ.

Примѣръ 2. Сложить 42,012 + 3,07 + 807 + 0,2199

$$\begin{array}{r} 42,012 \\ 3,07 \\ 807 \\ 0,2199 \\ \hline 852,3019 \end{array}$$

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ, что *сложеніе десятичныхъ дробей производится совершенно по тѣмъ же правиламъ, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ.*

§ 100. *Вычитаніе десятичныхъ дробей.*

Чтобъ вычесть десятичную дробь изъ таковой же, или цѣлое число съ десятичною дробью изъ таковаго же числа, надлежитъ

сперва подписать вычитаемое число подъ уменьшаемымъ, такъ какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ. Положимъ, что требуется вычесть 7,28 изъ 9,45.

Подписавъ надлежащимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 9,45 \\ 7,28 \\ \hline 2,17 \end{array}$$

должно начать вычитаніе съ единицъ наименьшаго разряда. 8 сотыхъ вычесть изъ 5 сотыхъ нельзя, занимаю одну десятую или 10 сотыхъ; прибавивъ 10 сотыхъ къ 5 сотымъ, получаю 15 сотыхъ; вычтя 8 сотыхъ изъ 15 сотыхъ, получу въ остаткѣ 7 сотыхъ; пишу 7 подъ сотыми. Изъ 3 десятыхъ вычитаю 2 десятыхъ, получаю въ остаткѣ 1 десятую, пишу 1 подъ десятыми; отнявъ 7 единицъ отъ 9 единицъ получу въ остаткѣ 2 единицы, пишу 2 подъ единицами; слѣд. весь остатокъ будетъ: 2, 17.

Иногда бываетъ въ уменьшаемомъ числѣ менѣе десятичныхъ знаковъ нежели въ вычитаемомъ; въ такомъ случаѣ, для удобности, прибавляется (§ 97) столько нулей, чтобъ число десятичныхъ знаковъ было одинаково

въ обоихъ числахъ, и потомъ надлежитъ поступать какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ.

Примѣръ 1. Изъ 17, 23 вычесть 14, 3897.

$$\begin{array}{r} 17,2300 \\ 14,3897 \\ \hline 2,8403 \end{array}$$

Примѣръ 2. Изъ 123 вычесть 49, 8275.

$$\begin{array}{r} 123,0000 \\ 49,8275 \\ \hline 73,1725 \end{array}$$

Изъ всего предъидущаго явствуетъ, что *вычитаніе десятичныхъ дробей производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ.*

§ 101. *Умноженіе десятичныхъ дробей.*

При умноженіи можно принять два случая: I. если десятичныя дроби находятся въ одномъ только множителѣ, и II. если оныя будутъ въ обоихъ множителяхъ.

1ый *Случай.* Умножить 0, 015 на 17.

Отбросивъ во множителѣ запятую, или принявъ оное за цѣлое число, умножимъ оное на 17.

15
17

105
15

255

Сіе произведеніе будетъ болѣе настоящаго въ 1000 разъ, потому что принятое множимое въ 1000 разъ болѣе даннаго; и такъ, чтобъ получить настоящее, должно найденное произведеніе 255 уменьшить въ 1000 разъ; сіе же уменьшеніе произойдетъ (§ 98), если будутъ отдѣлены запятою 3 десятичныхъ знака (именно столько, сколько оныхъ во множителѣ находится), слѣд. искомое произведеніе будетъ 0,255. Сіе дѣйствіе представляется въ слѣдующемъ видѣ:

0,015
17

105
15

0,255

Примѣръ 2. Умножить 215 на 0,09.

215
0,09

19,35

Примѣръ 3. Умножить 0,00012 × 15.

$$\begin{array}{r} 0,00012 \\ 15 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 0,00180 = 0,0018. \end{array}$$

Изъ всѣхъ сихъ примѣровъ можно вывести слѣдующее заключеніе: *чтобъ умножить два числа, изъ коихъ одно заключаетъ въ себѣ десятичную дробь, должно оныя множить какъ цѣлыя числа, и въ происшедшемъ произведеніи отдѣлить отъ правой руки къ лѣвой столько десятичныхъ знаковъ, сколько оныхъ находится во множимомъ числѣ, или во множителѣ.*

2ый *Случай.* Умножить 0,025 на 0,17.

Принявъ оба числа за цѣлыя, и перемноживъ оныя получимъ:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 17 \\ \hline 175 \\ 25 \\ \hline 425 \end{array}$$

Сіе произведеніе было бы болѣе искомаго въ 1000 разъ, еслибъ только множимое было принято за цѣлое число; но и множитель бо-

лѣе даннаго въ 100 разъ; слѣд. найденное произведеніе должно быть болѣе искомаго еще во 100 разъ; слѣд., чтобъ получить настоящее произведеніе, надлежитъ найденное уменьшить въ 100000 разъ: сіе уменьшеніе произведемъ, поставивъ запятую чрезъ пять знаковъ влѣво именно чрезъ столько, сколько десятичныхъ знаковъ въ обоихъ множителяхъ находится; но какъ произведеніе выражено только тремя знаками, то должно прибавить два нуля (§ 98) потомъ поставить еще 0, для означенія, что цѣлыхъ не имѣется. И такъ искомое произведеніе будетъ: 0,00425.

Примѣръ 2. Умножить 7,25 на 0,22.

$$\begin{array}{r} 7,25 \\ 0,22 \\ \hline 1450 \\ 1450 \\ \hline 1,5950 = 1,595. \end{array}$$

Примѣръ 3. Умножить 0,0024 на 0,016.

$$\begin{array}{r} 0,0024 \\ 0,016 \\ \hline 144 \\ 24 \\ \hline 0,0000384 \end{array}$$

Изъ сихъ примѣровъ можно заключить, что *для умноженія двухъ чиселъ, въ коихъ заключаются десятичныя дроби, надлежитъ оныя числа принять за цѣлыя, потомъ умножать ихъ какъ цѣлыя числа, и наконецъ въ происшедшемъ произведеніи отъ правой руки къ лѣвой отдѣлить столько знаковъ для десятичной дроби, сколько находится десятичныхъ знаковъ въ обоихъ множителяхъ.*

§ 102. *Дѣленіе десятичныхъ дробей.*

Дѣленіе десятичныхъ дробей можетъ быть также приведено къ дѣленію цѣлыхъ чиселъ. Положимъ, что требуется раздѣлить 0, 375 на 0,0025. Чтобъ раздѣлить 0,375 на 0,0025, т. е., чтобъ узнать, сколько разъ 0,0025 содержится въ 0, 325, надлежитъ сіи дроби привести къ одному знаменателю. Для сего надобно только прибавить къ дѣлимой дроби 0 (§ 97); ибо въ такомъ случаѣ обѣ дроби будутъ выражены въ десятитысячныхъ доляхъ.

И такъ,

0375 : 00025

равно 03750 : 00025.

Отбросивъ въ послѣднихъ числахъ, нули или, что все равно, принявъ оныя за цѣлыя числа, увеличиваемъ дѣлимое и дѣлителя въ

одинакое число разъ, а именно въ 10,000 разъ; слѣд. чрезъ таковое измѣненіе (§ 45. III) частное не перемѣнится. И такъ дѣленіе данныхъ десятичныхъ дробей приведено къ слѣдующему дѣленію цѣлыхъ чиселъ:

```
3750 | 25
25   |----
     | 150
----
125
125
----
```

слѣд. искомое частное будетъ 150.

Иногда дѣлитель бываетъ болѣе дѣлимаго, и въ такомъ случаѣ въ частномъ не можетъ быть цѣлаго числа.

Положимъ, что требуется раздѣлить 0,017 на 42. Приведши къ одному знаменателю и отбросивъ запятыя, данное дѣленіе приводится къ слѣдующему:

$$17 : 42000 = \frac{17}{42000}.$$

И такъ, чтобъ раздѣлить десятичную дробь на десятичную, или цѣлое число съ десятичными дробями на таковое же, и проч., должно: I. *Привести дѣлимое и дѣлителя къ одному знаменателю, прибавивъ къ десятичной дроби, въ которой менѣе знаковъ, столько нулей, сколько потребно, чтобъ было равное число десятичныхъ знаковъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ.*

II. *Отбросивъ запятыя, должно поступать точно такъ, какъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ.*

ГЛАВА VII.

ОБРАЩЕНІЕ ПРОСТЫХЪ ДРОБЕЙ ВЪ ДЕСЯТИЧНЫЯ И ОБРАТНО.

§ 103. *Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя.*

Изъ предъидущихъ параграфовъ явствуетъ, что способъ изображенія десятичныхъ дробей и различныя вычисленія съ оными весьма удобны, и по сей причинѣ простыя дроби часто оными замѣняются; но чтобъ можно было пользоваться симъ облегченіемъ, надлежитъ сперва умѣть обращать простыя дроби въ десятичныя.

Положимъ, что требуется обратить простую дробь $\frac{3}{4}$ въ десятичную, т. е. найти, сколько въ оной заключается десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ долей единицы и т. д. Изъ § 65 явствуетъ, что дробь $\frac{3}{4}$ можно разсматривать какъ частное, происшедшее отъ дѣленія 3 на 4. Поелику 3 менѣе 4, то въ частномъ не можетъ быть цѣлаго числа.

Чтобъ узнать, сколько въ частномъ заключается десятыхъ, приведемъ числителя 3 въ десятыя доли, коихъ будетъ 30; поелику же данная дробь $\frac{3}{4}$ менѣе 3 въ 4 раза, то надлежитъ только 30 (десятыхъ) раздѣлить на 4, чтобъ найти, сколько содержится десятыхъ въ частномъ.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 28 & 7 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

И такъ въ частномъ 7 десятыхъ и еще 2 десятыхъ въ остаткѣ. Если требуется опредѣлить частное еще точнѣе, т. е. въ сотыхъ доляхъ, то надлежитъ остатокъ 2 десятыхъ привести также въ сотыя, коихъ будетъ 20, и раздѣлить на 4. Раздѣливъ 20 на 4, получимъ въ частномъ 5. И такъ въ ономъ сверхъ 7 десятыхъ должно еще быть 5 сотыхъ; слѣд. $\frac{3}{4} = 0,75$.

Соединивъ всѣ сдѣланныя дѣленія, дѣйствіе сіе представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 28 & 0,75 \\ \cline{1-1} 20 & \\ 20 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

ПримѢръ 2. Обратить $\frac{3}{109}$ въ десятичную дробь.

```
 3,00 | 109
 2 1 8| 0,027
 ----
   820
   763
   ---
    57
```

Поелику данная дробь $\frac{3}{109}$ правильная, то въ частномъ не можетъ быть единицъ; также и десятыхъ въ ономъ не заключается; ибо, если 30 десятыхъ раздѢлить на 109, то не получится ни одной десятой, и посему должно поставить 0 на мѢстѢ единицъ и десятыхъ. Приведя въ сотыя части получимъ 300 сотыхъ; раздѢливъ оныя на 109 найдемъ, что въ частномъ должно быть 2 сотыхъ, и т. д.

Изъ сихъ примѢровъ выводится слѢдующее правило: I. *Чтобъ обратить простую дробь въ десятичную, надлежитъ числителя умножить на 10, и полученное произведеніе раздѢлить на знаменателя, поставивъ сперва 0 на мѢстѢ единицъ, если данная дробь правильная.*

II. *Если числитель, умноженный на 10 менѢе знаменателя, то ставится 0 на мѢстѢ десятыхъ, и полученное произведеніе увеличивается еще въ 10 разъ; если происшедшее отъ того число не превосходитъ знаменателя, то пишется 0 на*

мѣстѣ сотыхъ, и сіе умноженіе продолжается до тѣхъ поръ, пока изъ числителя данной дроби составится число большее нежели знаменатель, и потомъ уже надлежитъ поступать совершенно по правиламъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ.

Въ послѣднемъ примѣрѣ въ остаткѣ было 57. Сей остатокъ можно еще умножить на 10, и потомъ раздѣлить на 109, и тогда прибавится еще одинъ знакъ къ десятичной дроби. Легко усмотрѣть, что дробь $\frac{3}{109}$ не можетъ имѣть точнаго частнаго; ибо всегда будетъ остатокъ, потому что послѣдняя цифра дѣлителя 9 на какое бы число, меньшее 10-ти, ни было умножено, никогда не составитъ произведенія, оканчивающагося нулемъ, который всегда бываетъ послѣднимъ знакомъ дѣлимаго: и такъ десятичныя дроби бываютъ *конечныя и безконечныя.*

Изъ сего слѣдуетъ, что не всегда можно получать десятичную дробь, которая была бы совершенно равна данной простой дроби; но она приближается тѣмъ болѣе къ данной, чѣмъ болѣе опредѣлятся знаковъ.

Выше было найдено, что $\frac{3}{109} = 0,027.....$ Еслибъ мы остановились на второмъ знакѣ, т. е. на $\frac{2}{100}$, то разность между данною дробью и найденною десятичною была бы менѣе одной сотой; ибо

$\frac{3}{100}$ болѣе 0,02,

а менѣе 0,03;

но разность между 0,02 и 0,03 равна 0,01 слѣд. разность между 0,02 и $\frac{13}{100}$ менѣе 0,01; Если же къ десятичной дроби будетъ прибавленъ еще одинъ знакъ, то разность между данною дробью и десятичною будетъ менѣе 0,001. И такъ разность между данною простою и происходящею отъ оной десятичною дробью тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе знаковъ въ послѣдней.

§ 104. *Окончаніе дѣленія десятичныхъ дробей.*

Выше было замѣчено (§ 102), что при дѣленіи десятичныхъ дробей, частное можетъ быть менѣе единицы, и въ такомъ случаѣ оное будетъ правильною дробью. Но чтобъ при дѣленіи десятичныхъ дробей получить и частное въ видѣ десятичной дроби, надлежитъ по вышепоказанному правилу (§ 102) дѣлимое и дѣлителя привести къ одному знаменателю, принять оныя за цѣлыя числа, и потомъ поступать точно такъ какъ при обращеніи простой дроби въ десятичную (§ 103).

Примѣръ 1. Раздѣлить 7,1 : 4,25.

7,1 : 4,25.

или 7,10 : 4,25.

```
или  710 | 425
     425 |------
   ----- | 1,68
     2850
     2500
   ------
     3500
     3400
   ------
      100
```

Примѣръ 2. Раздѣлить 0,024 : 6,96.

```
       0,024 : 6,96
или    0,024 : 6,960
или       24 : 6960

       24,00 | 696
       2088  |--------
     ------  | 0,0344
        3120
        2784
      ------
        3360
        2784
      ------
         576
```

§ 105. *Обращенiе десятичныхъ дробей въ простыя.*

Чтобъ привести конечную десятичную дробь въ простую, надлежитъ только подписать подразумѣваемаго знаменателя, и потомъ сократить на общаго дѣлителя.

Примѣры: $0,16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

$0,0147 = \frac{147}{1000}$.

ГЛАВА VIII.

Періодическія десятичныя дроби.

§ 106. *Происхожденіе періодическихъ десятичныхъ дробей.*

При обращеніи простыхъ дробей мы видѣли, что не всегда получаются конечныя десятичныя дроби. Обративъ на прим. дробь $\frac{1}{7}$ въ десятичную, получимъ:

```
1,0 | 7
  7 | 0,4285714....
 30
 28
  20
  14
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      10
       7
       3  и проч.
```

и такъ $\frac{1}{7} = 0,14285714....$

Легко можно увѣриться, что при обращеніи данной простой дроби въ десятичную, остатки послѣ каждаго частнаго дѣленія должны быть менѣе знаменателя данной дроби, потому что оный есть дѣлитель; слѣд. не можетъ быть столько различныхъ остатковъ, сколько единицъ въ знаменателѣ данной дроби; и посему, если дѣленіе будетъ продолжаемо, непремѣнно получится остатокъ, равный какому нибудь предъидущему остатку, и тогда, при дальнѣйшемъ дѣленіи, тѣже самыя цифры должны повторяться въ частномъ, т. е. въ десятичной дроби; и какъ никогда остатокъ не можетъ быть равенъ 0, то десятичная дробь должна имѣть безконечное число знаковъ. Все сіе явствуетъ изъ вышеприведеннаго примѣра. Остатки послѣ частныхъ дѣленій были: 3, 2, 6, 4, 5, 1, потомъ получаются опять 3, 2 и т. д; откуда видны что въ частномъ должны потомъ повторяться тѣже самыя цифры, и въ томъ же порядкѣ.

Рядъ цифръ, повторяющихся въ одномъ и томъ же порядкѣ, именуется *періодомъ*; а таковыя десятичныя дроби называются *періодическими*.

Въ вышеприведенномъ примѣрѣ періодическая дробь начинается съ первой цифры, но это не всегда бываетъ, на примѣръ:

$$\frac{1}{6} = 0,16666\ldots.$$

$$\frac{1}{44} = 0,02272727\ldots\ldots$$

Въ первомъ примѣрѣ періодъ начинается со втораго знака, а во второмъ съ третьяго.

Обращеніе простыхъ дробей, имѣющихъ въ знаменателѣ цифру 9, написанную одинъ или нѣсколько разъ, въ десятичныя, заслуживаетъ особенное вниманіе. Обративъ дроби $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ и проч. въ десятичныя, получимъ:

$$\frac{1}{9} = 0,1111\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0,010101\ldots..$$

$$\frac{1}{999} = 0,001001001\ldots$$

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ, что *простыя дроби, имѣющія числителемъ единицу, а въ знаменателѣ знакъ 9, написанный одинъ или нѣсколько разъ, превращаются въ періодическія дроби, коихъ періоды состоятъ изъ столькихъ знаковъ, изъ сколькихъ цифръ состоитъ знаменатель данной дроби, и во всякомъ періодѣ первые знаки суть* 0, *а послѣдній* 1 (*кромѣ дроби* $\frac{1}{9}$, *въ составъ періода коей* 0 *не входитъ*).

§ 107. *Обращеніе періодическихъ десятичныхъ дробей въ простыя.*

Теперь слѣдуетъ показать обратное дѣйствіе, т. е. способъ опредѣлять простыя дроби, отъ коихъ происходятъ данныя періодическія

десятичныя дроби. Возмемъ сперва такую дробь, въ коей періодъ начинается съ перваго знака, на прим. 0,5555...

Сію дробь можно разложить на два множителя, изъ коихъ одинъ равенъ числу составляющему періодъ, т. е. 5. Чтобъ найти другой, надлежитъ 0,5555.... раздѣлить на 5, и найдемъ что оный долженъ быть $=$ 0,1111....; и такъ 0,5555.... $= 5 \times 0,1111$; но дробь 0,1111... происходитъ отъ $\frac{1}{9}$ (§ 106); слѣд. 0,555.... происходитъ отъ $\frac{1}{9}$, взятой 5 разъ, или отъ $\frac{6}{9}$.

Точно такимъ же образомъ можно доказать, что

$$0,353535.... = 35 \times 0,010101... = 35 \times \frac{1}{99} = \frac{35}{99}.$$

$$0,479479479.... = 479 \times 0,001001001... = 479 \times \frac{1}{999} = \frac{479}{999}$$

$$0,001400140014... = 14 \times 0,000100010001.. = 14 \times \frac{1}{9999} = \frac{14}{9999}.$$

Изъ сихъ примѣровъ явствуетъ, что *каждая десятичная дробь, коея періоды начинаются съ перваго знака, происходитъ отъ такой простой дроби, коея числитель равенъ числу, составляющему періодъ, а знаменатель составленъ изъ цифры* 9, *написанной одна подлѣ другой столько разъ, сколько въ періодѣ находится знаковъ (считая и нули).*

И такъ $0,013013013\ldots = \frac{13}{999}$.

$0,01450145\ldots = \frac{145}{9999}$ и проч.

Въ предъидущихъ примѣрахъ періодическая дробь начиналась съ перваго знака; разсмотримъ теперь тотъ случай, когда періодъ начинается не съ первой цифры. Пусть будетъ данная дробь $0,42222\ldots$

Запятую должно переставить на одинъ знакъ вправо, чтобъ получить періодическую дробь, подобную тѣмъ, которыя выше были расматриваемы, и тогда вмѣсто данной дроби будемъ имѣть: $4,2222\ldots$; но $4,2222\ldots = 4 + 0,2222\ldots = 4 + \frac{2}{9} = 4\frac{2}{9}$

Чрезъ перестановленіе запятой на одинъ знакъ вправо, дробь увеличилась въ 10 разъ (§ 98); слѣд. $4\frac{2}{9}$ въ 10 разъ болѣе оной; и такъ чтобъ найти простую дробь, отъ которой происходитъ данная періодическая десятичная дробь, надлежитъ $4\frac{2}{9}$ раздѣлить на 10.

$$4\tfrac{2}{9} : 10 = \tfrac{38}{9} : 10 = \tfrac{38}{90} = \tfrac{19}{45};$$

слѣд. $0,42222\ldots = \frac{19}{45}$.

И такъ чтобы въ простую дробь обратить періодическую десятичную дробь, коея періоды не начинаются съ первой цифры, надлежитъ:

I. *Поставить запятую предъ тою цифрою, съ которой начинается періодъ.*

II. *Полученную періодическую дробь обратить въ простую.*

III. *Придать оную къ цѣлому числу (если есть).*

IV. *Уменьшить сумму во столько разъ, во сколько данное число было увеличено, при перенесеніи запятой.*

ГЛАВА IX.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

§ 108. *Происхожденіе непрерывныхъ дробей.*

Случаются дроби, коихъ числители и знаменатели суть взаимно первыя числа. Таковыя дроби не могутъ быть представлены въ меньшемъ или простѣйшемъ видѣ; но можно найти дроби, коихъ величина приближается къ величинѣ данныхъ дробей, и которыя выражаются меньшими числами. Пусть будетъ данная дробь $\frac{29}{158}$. Чтобъ получить самую простѣйшую приближенную дробь, должно раздѣлить числителя и знаменателя сей дроби на числителя:

$$\begin{array}{r|l} 158 & 29 \\ \cline{2-2} 145 & 1 \\ \hline 13 & \end{array}$$

и такъ $\frac{29}{158} = \frac{1}{5 + \frac{13}{29}}$ (§ 71. II).

Отбросивъ дробь, находящуюся въ знаменателѣ, получимъ $\frac{1}{5}$, первую приближенную величину для данной дроби. Но разность между и данною дробью довольно значительна; ибо послѣдняя равна 1 раздѣленной на $5\frac{13}{29}$, а не на 5. Чтобъ найти вторую приближенную дробь, надлежитъ поступить съ дробью $\frac{13}{29}$ какъ было поступлено съ данною, т. е., раздѣлить числителя и знаменателя на числителя.

$$\begin{array}{r|l} 29 & 13 \\ \underline{26} & \overline{\;2\;} \\ 3 & \end{array}$$

слѣд. $$\frac{13}{29}=\frac{1}{2+\frac{3}{13}}$$

Поставивъ вмѣсто равной величины равную въ выраженіе для данной дроби, будемъ имѣть:

$$\frac{29}{158}=\frac{1}{5+\frac{13}{29}}=\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{3}{13}}}$$

Отбросивъ въ послѣднемъ знаменателѣ дробь $\frac{3}{13}$, получимъ вторую приближенную величину.

$$\frac{1}{5+\frac{1}{2}}$$

Оную можно представить въ видѣ простой дроби; для сего надлежитъ $5+\frac{1}{2}$ привести въ неправильную дробь и раздѣлить 1 на оную:

$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, слѣд. $\frac{1}{5 + \frac{1}{2}} =$ (§ 93) $\frac{2}{11}$.

Чтобъ найти третью приближенную величину, надобно дробь послѣдняго знаменателя $\frac{3}{13}$ сократить на числителя и получимъ:

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{4 + \frac{1}{3}};$$

слѣд. $$\frac{29}{158} = \frac{1}{5 + \frac{13}{69}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{3}{13}}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}}}$$

Отбросивъ дробь $\frac{1}{3}$ въ послѣднемъ знаменателѣ, будемъ имѣть третью приближенную величину:

$$\frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

По раздѣленіи 1 на $2\frac{1}{4}$ будетъ:

$$\frac{1}{5 + \frac{4}{9}}$$

Раздѣливъ 1 на $5\frac{4}{9}$ получимъ $\frac{9}{49}$, третью приближенную величину.

Продолжая точно такимъ же образомъ, можно опредѣлять и слѣдующія приближенныя величины.

Дроби, въ семъ новомъ видѣ представленныя, называются *непрерывными*, и онымъ можно сдѣлать слѣдующее опредѣленіе: *непрерывныя дроби суть такія, которыя имѣютъ знаменателемъ цѣлое число съ дробью, которая также содержитъ въ своемъ знаменателѣ цѣлое число съ дробью и т. д.*

§ 109. *Сокращенный способъ приведенія простыхъ дробей въ непрерывныя.*

Изъ данной дроби $\frac{29}{158}$ мы постепенно получали:

$$\frac{29}{158}=\cfrac{1}{5+\frac{13}{29}}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{3}{13}}}=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{1}{3}}}}$$

Первый числитель какъ и всѣ прочія суть 1. Первый знаменатель есть 5; оный произошелъ отъ дѣленія 158 на 29; втораго знаменателя 2 мы нашли, раздѣливъ числителя 29 на остатокъ 13; третьяго знаменателя 4 получили, раздѣливъ первый остатокъ 13 на второй остатокъ 3, и т. д.

На семъ замѣчаніи основанъ кратчайшій способъ обращенія простыхъ дробей въ непрерывныя. Для сего надлежитъ сперва раздѣлить

знаменателя на числителя, потомъ числителя на первый остатокъ, первый остатокъ на вторый и т. д., пока не будетъ 0 въ остаткѣ. Поставляя въ числителѣ 1, а знаменателями полученныя частныя въ томъ же порядкѣ, получимъ искомую непрерывная дробь.

Пусть будетъ данная дробь $\frac{149}{960}$.

960	149
894	6
149	66
132	2
66	17
51	3
17	15
15	1
15	2
14	7
2	1
2	2

И такъ $\frac{149}{960} = \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2}}}}}}$

ОТДѢЛЕНІЕ IV.

Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ.

ГЛАВА I.

Объ отношеніяхъ.

§ 110. *Объ отношеніяхъ вообще.*

Чтобы имѣть ясное понятіе о величинѣ какого нибудь предмета, должно оный сравнивать съ другими, съ нимъ однородными; тоже можно сказать и о числахъ. Изъ 20 и 42 параграфовъ явствуетъ, что сравненіе бываетъ двоякаго рода: во 1^{хъ}, можно сравнивать числа для того, чтобъ узнать *чѣмъ* одно число болѣе или менѣе другаго; и во 2^{хъ}, *во сколько разъ* одно число болѣе или менѣе другаго. На прим. 12 болѣе 4^{хъ} осмью единицами, или также втрое болѣе; напротивъ, 4 менѣе 12^{ти} осмью единицами, или также втрое менѣе.

Таковый выводъ изъ сравненія чиселъ именуется *отношеніемъ*, которое также бываетъ двоякаго рода, по причинѣ двоякаго сравненія.

Выше (§ 20) было объяснено, что для опредѣленія, *чѣмъ* одно число болѣе или менѣе другаго, надлежитъ найти *разность* между данными числами; а посему и отношеніе чиселъ, происходящее изъ сего рода сравненія, называется *разностнымъ* (ариѳметическимъ).

Также было замѣчено (§ 42), что для опредѣленія, *во сколько разъ* (кратъ) одно число болѣе или менѣе другаго, должно раздѣлить большее число на меньшее, и отношеніе чиселъ, изъ таковаго сравненія происходящее, называется *кратнымъ* (геометрическимъ.),

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что *отношеніе чиселъ бываетъ двоякаго рода: разностное и кратное. Разностное отношеніе есть показаніе чѣмъ одно число болѣе или менѣе другаго, а кратное есть показаніе во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другаго.*

О разностномъ (Ариѳметическомъ) отношеніи.

§ 111. *О свойствахъ разностнаго отношенія.*

Поелику разностное отношеніе между двумя числами опредѣляется ихъ разностію, которая находится посредствомъ вычитанія, то для означенія разностнаго отношенія употребляется

знакъ вычитанія, который ставится между данными числами. И такъ 12—7 есть выраженіе разностнаго отношенія между 12 и 7.

Числа 12 и 7, между коими опредѣляется отношеніе, называются членами онаго. Первое число 12 именуется *предъидущимъ* членомъ, а второе 7 *послѣдующимъ*.

При измѣненіи одного изъ членовъ должно измѣняться и отношеніе между оными. Пусть будетъ дано разностное отношеніе: 15—6. Если къ первому члену будетъ придано произвольное число 2, то разность увеличится на тоже число (§ 23), и посему отношеніе между числами измѣнится. Также если къ меньшему числу 6 прибавится произвольное число 5, то разность уменьшится на то же число; а посему и отношеніе между числами измѣнится. Еслиже къ обоимъ числамъ прибавится одно и тоже произвольное число, на прим. 5, то разность останется таже (ибо, на какое число она увеличивается отъ увеличиванія большаго, на такое же число уменьшается отъ увеличиванія меньшаго числа); слѣд. отношеніе между полученными числами 20 и 11 будетъ тоже, какое и между данными числами 15 и 6.

Подобнымъ же образомъ можно вывесть, что разностное отношеніе между данными числами не измѣнится, если изъ обоихъ членовъ будетъ вычтено какое нибудь число.

Пусть будетъ дано разностное отношеніе: 22 — 10, въ коемъ разность равна 12; вычтя изъ обоихъ членовъ произвольное число $7\frac{1}{2}$, получимъ новое разностное отношеніе: $14\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$, въ коемъ разность также равна 12.

§ 112. *Раздѣленіе разностнаго отношенія на прямое и обратное.*

Изъ предъидущаго параграфа явствуетъ, что можетъ быть множество разностныхъ отношеній, въ коихъ разности равны.

Примѣры: $11\frac{1}{2} - 8$, $9\frac{3}{4} - 6\frac{1}{4}$, $7 - 3\frac{1}{2}$ — разность равна $3\frac{1}{2}$.

Во всѣхъ сихъ разностныхъ отношеніяхъ разности равны, и таковыя отношенія называются *равными*. При семъ должно замѣтить, что числа расположены одинакимъ образомъ, т. е., во всѣхъ отношеніяхъ предъидущіе члены болѣе послѣдующихъ, и въ семъ случаѣ разностныя отношенія называются *прямыми*. Если же въ двухъ разностныхъ отношеніяхъ разности хотя и будутъ равны, но члены расположены не одинакимъ образомъ, на примѣръ:

20 — 14, разность между членами равна 6,

3 — 9, разность также равна 6;

то въ такомъ случаѣ отношенія называются *обратными*. И такъ *прямыми разностными*

отношеніями называются такія, въ коихъ разности равны, и члены расположены одинакимъ образомъ. Обратными разностными отношеніями называются такія, въ коихъ разности между членами равны, но члены расположены различнымъ образомъ, т. е., если въ 1^{мъ} отношеніи предъидущій членъ *болѣе* послѣдующаго, то во 2^{мъ} предъидущій долженъ быть *менѣе* послѣдующаго такимъ же числомъ, и обратно: если въ 1^{мъ} отношеніи предъидущій членъ *менѣе* послѣдующаго, то во 2^{мъ} предъидущій долженъ быть *болѣе* послѣдующаго такимъ же числомъ.

О КРАТНОМЪ (ГЕОМЕТРИЧЕСКОМЪ) ОТНОШЕНІИ.

§ 113. *О знаменателѣ отношенія.*

Поелику кратное отношеніе между двумя числами опредѣляется частнымъ числомъ, которое находится посредствомъ дѣленія, то для означенія кратнаго отношенія принятъ знакъ дѣленія, который ставится между данными числами. И такъ выраженіе, 16:8 есть выраженіе кратнаго отношенія между 16 и 8. Числа, составляющія отношеніе, называются членами онаго; первое число именуется *предъидущимъ* членомъ, а второе *послѣдующимъ*.

Для опредѣленія знаменателя отношенія будемъ всегда дѣлить предъидущій членъ на послѣдующій. А изъ сего слѣдуетъ, что знаменатель можетъ быть *цѣлымъ* числомъ, когда въ предъидущемъ членѣ послѣдующій заключается цѣлое число разъ; *смѣшаннымъ*, когда въ предъидущемъ послѣдующій заключается не цѣлое число разъ; *дробнымъ*, когда предъидущій членъ менѣе послѣдующаго; на прим.

въ отношеніяхъ: 24 : 8 знаменатель 3,
43 : 5 знаменатель $8\frac{3}{5}$,
20 : 25 знаменатель $\frac{20}{25}$.

Въ первыхъ двухъ случаяхъ знаменатель показываетъ, *во сколько разъ* предъидущій болѣе своего послѣдующаго; а въ послѣднемъ, *какую часть* онаго составляетъ.

Поелику при опредѣленіи знаменателя предъидущій членъ всегда принимается за дѣлимое, послѣдующій за дѣлителя, а частное за знаменателя, и какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное (§ 35); то *во всякомъ кратномъ отношеніи предъидущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на знаменателя.*

§ 114. *О свойствахъ кратнаго отношенія.*

Разсмотримъ теперь, какія перемѣны должны происходить въ знаменателѣ отношенія, при умноженіи и дѣленіи членовъ онаго. Пусть будетъ данное отношеніе 24:8, въ коемъ знаменатель равенъ 3.

Если умножится первый членъ на произвольное число, на прим. 5, то знаменатель долженъ увеличиться въ 5 разъ, потому что (§ 45. I) частное увеличивается, когда умножается дѣлимое, а дѣлитель остается тотъ же. И въ самомъ дѣлѣ знаменатель новаго кратнаго отношенія (120:8) равенъ 15.

Если же умножится вторый членъ даннаго отношенія на какое нибудь число, на прим. 4, то знаменатель уменьшится въ 4 раза, потому что (§ 45. II) частное уменьшается, когда умножается дѣлитель, а дѣлимое не измѣняется. И въ самомъ дѣлѣ. знаменатель новаго кратнаго отношенія (24:32) равенъ $\frac{24}{32}$ или $\frac{3}{4}$, т. е., въ 4 раза менѣе 3.

Изъ сихъ двухъ случаевъ слѣдуетъ, что знаменатель не измѣняется, если оба члена будутъ умножены на одно и тоже число; ибо во сколько разъ оный увеличивается отъ умноженія 1^{го} члена, во столько же разъ уменьшается отъ умноженія втораго. На прим. въ отно-

шеніи 20 : 5 знаменатель 4; умноживъ оба члена на произвольное число 7, получимъ новое отношеніе (140 : 35), въ которомъ знаменатель равенъ $\frac{140}{35}$ или 4.

Подобнымъ же образомъ можно вывести, что и при *дѣленіи* обоихъ членовъ одного отношенія на одно и то же число знаменатель не измѣняется, ибо во сколько разъ оный уменьшается отъ дѣленія перваго члена, во столько же разъ увеличивается отъ дѣленія втораго.

§ 115. *Раздѣленіе кратнаго отношенія на прямое и обратное.*

Знаменатели двухъ или нѣсколькихъ кратныхъ отношеній могутъ быть равны и не равны; въ первомъ случаѣ кратныя отношенія называются *равными*.

На прим. кратныя отношенія:

20 : 80
4 : 16

равны, потому что въ каждомъ знаменатель равенъ $\frac{1}{4}$.

Изъ равенства знаменателей двухъ равныхъ кратныхъ отношеній слѣдуетъ, что предъидущій членъ перваго отношенія долженъ быть во столько разъ болѣе или менѣе своего послѣдующаго, во сколько разъ предъидущій вто-

раго отношенія болѣе или менѣе своего послѣдующаго. Въ вышеприведенномъ примѣрѣ первый членъ (20) перваго отношенія менѣе своего послѣдующаго (80) въ 4 раза, также и во второмъ отношеніи первый членъ 4 менѣе своего послѣдующаго (16) въ 4 раза. Таковыя кратныя отношенія называются *прямыми*.

Если же въ двухъ кратныхъ отношеніяхъ предъидущій членъ перваго отношенія во столько разъ *болѣе* своего послѣдующаго, во сколько предъидущій втораго отношенія *менѣе* своего послѣдующаго; или, если предъидущій членъ перваго отношенія во столько разъ менѣе своего послѣдующаго, во сколько во второмъ *болѣе*: то таковыя кратныя отношенія называются *обратными*. На прим. въ кратномъ отношеніи 30:5 первый *болѣе* втораго въ 6 разъ; а въ отношеніи $\frac{1}{2}$:3, первый членъ *менѣе* втораго въ 6 разъ; въ такомъ случаѣ числа 30 и 5 находятся въ обратномъ отношеніи съ другими числами, т. е., съ $\frac{1}{2}$ и 3.

§ 116. *Сокращеніе членовъ кратнаго отношенія.*

Въ § 114 было доказано, что кратное отношеніе между двумя числами не измѣняется, если оба числа будутъ раздѣлены на одно и то же число.

Пусть будетъ данное кратное отношеніе: 45:27. Оба члена дѣлятся на 9 (§ 73); раздѣливъ на 9 превратимъ данное отношеніе въ слѣдующее: 5:3, знаменатель коего будетъ равенъ знаменателю даннаго отношенія. И такъ члены даннаго отношенія уменьшились, но сохранили между собою то же самое отношеніе.

Сіе дѣйствіе называется *сокращеніемъ* членовъ отношенія. Изъ примѣра явствуетъ, что *для сокращенія членовъ кратнаго отношенія надлежитъ раздѣлить оные на общаго дѣлителя.*

§ 117. *Изображеніе кратнаго отношенія между дробными числами въ цѣлыхъ числахъ.*

Также было доказано (въ § 114), что кратное отношеніе между двумя числами не измѣняется, если оба члена будутъ умножены на одно и тоже число. На семъ свойствѣ кратнаго отношенія основано изображеніе отношенія между дробями въ цѣлыхъ числахъ.

Здѣсь могутъ быть два случая: I. дроби могутъ имѣть одинакихъ знаменателей, и II. разныхъ знаменателей.

Iй *Случай*. Пусть будетъ дано кратное отношеніе: $\frac{5}{8} : \frac{3}{8}$.

Отнявъ знаменателей въ обѣихъ дробяхъ, увеличимъ оба члена въ 8 разъ; а посему отношеніе между 5 и 3 должно быть равно отношенію между $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$ (§ 114).

2[й] *Случай.* Дроби съ различными знаменателями можно (§ 78) всегда привести къ одному; слѣд. *для изображенія кратнаго отношенія между дробями съ разными знаменателями, надлежитъ только привести ихъ къ одному, и потомъ поступать какъ въ 1[мъ] случаѣ показано, т. е, отбросить знаменателей.*

Примѣръ. Изобразить кратное отношеніе: $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$ въ цѣлыхъ числахъ.

Приведя данныя дроби къ одному знаменателю, будетъ: $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{14}{35}:\frac{15}{35}=$ (по 1[му] случаю) $14:15$.

Если данное кратное отношеніе состоитъ изъ смѣшанныхъ чиселъ, или изъ смѣшанныхъ чиселъ и цѣлыхъ, и проч., то во всѣхъ сихъ случаяхъ надлежитъ сперва привести члены въ неправильныя дроби, имѣющія одинакихъ знаменателей, и потомъ поступать по вышесказанному правилу.

Примѣръ. Изобразить кратное отношеніе между $3\frac{1}{4}$ и 2 въ цѣлыхъ числахъ.

Приведя оба члена въ неправильныя дроби, получимъ:

$$3\tfrac{1}{4}:2=\tfrac{13}{4}:\tfrac{8}{4}=13:8.$$

Изобразимъ теперь кратное отношеніе между дробями, имѣющими *одинакихъ* числителей, но *разныхъ* знаменателей въ цѣлыхъ числахъ; на прим. кратное отношеніе между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{8}$. Приведя къ одному знаменателю, получимъ: $\frac{1}{3}:\frac{1}{8}=\frac{8}{24}:\frac{3}{24}=8:3$.

Возмемъ еще одинъ примѣръ, въ которомъ бы числители были болѣе единицы. Положимъ, что требуется изобразить кратное отношеніе между $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{7}$ въ цѣлыхъ числахъ. По раздѣленіи обоихъ членовъ на 3, данное отношеніе обратится въ слѣдующее: $\frac{1}{5}:\frac{1}{7}$; но $\frac{1}{5}:\frac{1}{7}=\frac{7}{35}:\frac{5}{35}=7:5$; слѣд. и $\frac{3}{5}:\frac{3}{7}=7:5$.

И такъ дроби съ одинакими числителями, но разными знаменателями находятся въ обратномъ отношеніи съ своими знаменателями; т. е., первая дробь относится ко второй, такъ какъ знаменатель второй къ знаменателю первой.

§ 118. *О сложномъ кратномъ отношеніи.*

Если сходственные члены двухъ или болѣе кратныхъ отношеній будутъ сложены, вычтены, перемножены и раздѣлены, то получатся суммы, разности, произведенія и частныя, составляющія новыя кратныя отношенія, называемыя *сложными*. Здѣсь будетъ разсмотрѣно сложное отношеніе только въ двухъ случаяхъ:

I. Сложное отношеніе, происходящее отъ сложенія сходственныхъ членовъ двухъ или болѣе кратныхъ отношеній, имѣющихъ равныхъ знаменателей. II. Сложное отношеніе, происходящее отъ умноженія сходственныхъ членовъ двухъ или болѣе кратныхъ отношеній, имѣющихъ какихъ нибудь знаменателей.

1й *Случай.* Пусть будутъ данныя кратныя отношенія, имѣющія равныхъ знаменателей:

14:2
35:5.

Сложивъ сходственные члены данныхъ отношеній, коихъ знаменатели равны 7, получимъ новое кратное отношеніе: 49:7, въ которомъ знаменатель будетъ равенъ также 7, т. е., знаменателю каждаго даннаго отношенія — что и должно быть, потому что 2 содержится въ 14ти 7 разъ, и 5 заключается въ 35ти 7 разъ; а изъ сего слѣдуетъ, что и сумма первыхъ двухъ чиселъ, т. е, 2 + 5 должна содержаться въ суммѣ послѣднихъ, т. е., въ 14 + 35, 7 разъ. Итакъ, *если будутъ сложены сходственные члены двухъ кратныхъ равныхъ отношеній, то составится новое кратное отношеніе, коего знаменатель равенъ знаменателю даннаго отношенія.*

Тоже самое можно вывести и для сложнаго отношенія, состоящаго изъ трехъ или болѣе кратныхъ равныхъ отношеній.

2й *Случай*. Пусть будутъ даны два кратныя отношенія:

$$3:8$$
$$16:5.$$

Перемноживъ сходственные члены, получимъ сложное кратное отношеніе: 48:40. Разсмотримъ, чему равенъ знаменатель онаго. Если бы мы умножили только предъидущій членъ перваго отношенія на предъидущій втораго, то знаменатель увеличился бы въ 16 разъ (§ 114); но какъ и послѣдующій членъ перваго отношенія былъ умноженъ на послѣдующій втораго, то знаменатель уменьшится въ 5 разъ; слѣд. знаменатель сложнаго кратнаго отношенія долженъ быть болѣе знаменателя перваго отношенія въ $\frac{16}{5}$ раза, т. е., во столько разъ, сколько единицъ во знаменателѣ втораго отношенія, или равенъ произведенію изъ обоихъ знаменателей ($\frac{3}{8} \times \frac{16}{5}$).

Тоже самое можно доказать и въ такомъ случаѣ, когда сложное кратное отношеніе состоитъ изъ трехъ или болѣе данныхъ кратныхъ отношеній.

ГЛАВА II.

О ПРОПОРЦІЯХЪ.

§ 119. *О пропорціяхъ вообще.*

Выше было сказано, что отношенія могутъ быть двоякаго рода: разностныя и кратныя, и что отношенія обоихъ родовъ могутъ быть равныя.

Соединеніе двухъ равныхъ отношеній одного рода называется *пропорціею.* И поелику отношенія могутъ быть двоякаго рода, то и пропорція можетъ быть или *разностная* (ариѳметическая), или *кратная* (геометрическая). Первая состоитъ изъ двухъ равныхъ разностныхъ, а вторая изъ двухъ равныхъ кратныхъ отношеній.

Поелику въ каждомъ отношеніи заключаются два числа, то въ пропорціи, состоящей изъ двухъ отношеній должно быть четыре числа, которые называются *членами.* Первый и четвертый члены именуются *крайними*, второй и третій *средними*, первый и третій *предъидущими*, а второй и четвертый *послѣдующими.*

Должно замѣтить, что въ разностныхъ пропорціяхъ:

$$13 - 6 = 11 - 4,$$

$$3 - 9 = 2\tfrac{1}{2} - 8\tfrac{1}{2},$$

первый членъ тѣмъ же числомъ болѣе или менѣе втораго, какимъ третій членъ болѣе или менѣе четвертаго, потому что разности обоихъ отношеній равны.

Точно такъ и въ кратныхъ пропорціяхъ

$$21 : 7 = 42 : 14,$$

$$5 : 20 = 3 : 12,$$

первый членъ во столько же разъ болѣе или менѣе втораго, во сколько третій членъ болѣе или менѣе четвертаго, потому что знаменатели отношенія равны.

О РАЗНОСТНОЙ (АРИѲМЕТИЧЕСКОЙ) ПРОПОРЦІИ.

§ 120. *О главномъ свойствѣ разностной пропорціи.*

Уже было замѣчено, что въ разностной пропорціи предъидущіе члены могутъ быть болѣе и менѣе своихъ послѣдующихъ; посему, чтобъ можно было сдѣлать строгое заключеніе, надлежитъ разсмотрѣть оба случая.

1ый *Случай.* Если предъидущіе члены болѣе послѣдующихъ, на прим.

$$13 - 6 = 11 - 4.$$

Изъ равенства отношеній слѣдуетъ, что первый членъ такимъ же числомъ болѣе втораго, какимъ четвертый менѣе третьяго; изъ сего же слѣдуетъ, что сумма перваго и четвертаго членовъ должна быть равна суммѣ втораго и третьяго.

Чтобъ совершенно увѣриться въ семъ свойствѣ разностной пропорціи, изслѣдуемъ оное точнѣе.

Сумма крайнихъ членовъ состоитъ изъ 1го и 4го; но 1^{й} членъ, какъ большій въ 1^{мъ} отношеніи, равенъ 2^{му} и разности: и такъ, поставивъ вмѣсто 1го члена 2^{й} членъ и разность, будемъ имѣть:

Сумма крайн. чл. $=$ 2 чл. $+$ разн. $+$ 4 чл.

Сумма среднихъ членовъ состоитъ изъ 2го и 3го; но 3^{й} членъ, какъ большій во второмъ отношеніи, равенъ 4^{му} и разности; слѣд. взявъ вмѣсто 3го члена 4 членъ и разность, получимъ:

Сумма средн. чл. $=$ 2 чл. $+$ 4 чл. $+$ разн.

И такъ сумма крайнихъ членовъ и сумма среднихъ состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же частей; слѣд. дожны быть равны.

2^{й} Случай. Если предъидущіе члены менѣе послѣдующихъ, на прим.

$$3 - 9 = 2\tfrac{1}{3} - 8\tfrac{1}{3}.$$

Сумма крайнихъ членовъ состоитъ изъ 1го и 4го; но четвертый членъ, какъ большій во 2^{мъ} отношеніи, состоитъ изъ 3го члена и разности; и такъ, поставивъ вмѣсто 4го члена равныя ему числа, найдемъ, что

Сумма крайн. чл. = 1 чл. + 3 чл. + разн.

Сумма среднихъ членовъ состоитъ изъ 2го и 3го; но 2^{й} членъ, какъ большій членъ въ первомъ отношеніи, состоитъ изъ перваго и разности; взявъ вмѣсто втораго члена равныя ему числа, найдемъ что,

Сумма средн. член. = 1 чл. + разн + 3чл.

И такъ сумма крайнихъ членовъ и сумма среднихъ состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же частей; слѣд. должны быть равны.

Изъ всего, что было сказано, можно заключить, что *во всякой разностной пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.*

§ 121. *Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ разностной пропорціи.*

Основываясь на свойствѣ разностной пропорціи, доказанномъ въ предъидущемъ параграфѣ, легко можно находить одинъ изъ членовъ оной, когда прочіе извѣстны.

Пусть въ данной разностной пропорціи неизвѣстенъ послѣдній членъ, который будемъ означать Латинскою буквою x, на прим.

$$14 - 12 = 17 - x.$$

Уже доказано, что сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ, которая равна 29; слѣд. сумма крайнихъ равна также 29. Одинъ изъ крайнихъ членовъ, т. е. первый, равенъ 14; слѣд. другой крайній членъ, т. е, четвертый, долженъ быть равенъ остальной части цѣлой суммы. И такъ, чтобъ найти оный, надлежитъ изъ 29 вычесть 14, и остатокъ 15 будетъ искомое число; слѣд.

$$14 - 12 = 17 - 15.$$

Можно еще другимъ образомъ опредѣлить послѣдній членъ разностной пропорціи, основываясь на томъ, что отношенія, оную составляющія, должны быть равны. Въ первомъ отношеніи предъидущій членъ болѣе послѣдующаго 2мя; слѣд. и во второмъ отношеніи предъидущій членъ 17 долженъ быть болѣе послѣдующаго 2мя. И такъ, чтобъ опредѣлить оный, должно 2 вычесть изъ 17, и остатокъ 15 будетъ искомое число.

Положимъ, что въ данной разностной пропорціи одинъ изъ среднихъ членовъ будетъ неизвѣстенъ, на прим. третій:

$$21 - 27 = x - 16.$$

Сумма крайнихъ членовъ равна 37; слѣд. и сумма среднихъ равна 37. Одинъ изъ оныхъ

равенъ 27; слѣд. другой долженъ быть равенъ остальной части найденной суммы; и такъ, для опредѣленія онаго, надлежитъ вычесть 27 изъ 37, и остатокъ 10 будетъ искомый третій членъ, т. е.,

$$21 - 27 = 10 - 16;$$

слѣд. чтобъ найти третій членъ разностной пропорціи, слѣдуетъ только изъ суммы крайнихъ членовъ вычесть второй членъ.

Подобнымъ образомъ можно вывести, что если въ разностной пропорціи изъ суммы крайнихъ членовъ вычтемъ третій, получимъ второй членъ; если же изъ суммы среднихъ членовъ вычтемъ четвертый, то найдемъ первый членъ.

И такъ, *если въ разностной пропорціи одинъ изъ крайныхъ членовъ неизвѣстенъ, то для опредѣленія онаго надлежитъ изъ суммы среднихъ членовъ вычесть другой крайній членъ; если же одинъ изъ среднихъ членовъ неизвѣстенъ, то для опредѣленія онаго слѣдуетъ изъ суммы крайнихъ членовъ вычесть извѣстный средній членъ.*

§ 122. *О непрерывной разностной пропорціи.*

Иногда въ разностной пропорціи средніе члены равны между собою; на прим.

$$13 - 19 = 19 - 25.$$

Въ такомъ случаѣ оная называется *непрерывною*; а каждый среднiй членъ *среднимъ разностнымъ числомъ* (или среднимъ ариѳметическимъ числомъ).

Изъ § 121 слѣдуетъ, что и въ непрерывной разностной пропорцiи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ; но какъ среднiе члены равны между собою, то сумма среднихъ членовъ должна быть равна которому нибудь изъ среднихъ членовъ, дважды взятому.

Изъ сего же слѣдуетъ:

I. Чтобы найти который нибудь изъ крайнихъ членовъ непрерывной разностной пропорцiи, слѣдуетъ только изъ удвоеннаго средняго члена вычесть извѣстный крайнiй.

II. Чтобы найти среднiй членъ непрерывной разностной пропорцiи, надлежитъ сумму крайнихъ раздѣлить на 2.

§ 123. *Отъискиванiе средняго разностнаго числа.*

На семъ послѣднемъ выводѣ основывается отъискиванiе средняго разностнаго числа нѣсколькихъ данныхъ чиселъ. Поелику для опредѣленiя средняго числа, если даны два числа, сумма данныхъ чиселъ дѣлится на 2, т. е., на число членовъ; то для опредѣленiя средняго числа нѣсколькихъ чиселъ, должно раздѣлить сумму членовъ на число оныхъ.

Пусть будутъ данныя числа: 23, 24, 28 и 29, и требуется опредѣлить среднее ихъ число. Сложивъ оныя:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 24 \\ 28 \\ 29 \\ \hline 104 \end{array}$$

получимъ 104, раздѣливъ сію сумму на число членовъ, т. е. на 4,

$$\begin{array}{r|l} 104 & 4 \\ \cline{2-2} 8 & 26 \\ \cline{1-1} 24 & \\ 24 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

будемъ имѣть въ частномъ 26, которое и должно быть среднимъ разностнымъ числомъ.

О кратной (Геометрической) пропорціи.

§ 124. *О главномъ свойствѣ кратной пропорціи.*

Выше было доказано, что во всякой разностной пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ. Кратная пропорція имѣетъ сходное свойство, а именно: произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Возмемъ какую нибудь кратную пропорцію:

$$12:8=9:6.$$

Произведеніе крайнихъ членовъ состоитъ изъ 1го умноженнаго на 4^{й}; 1^{й} же членъ, какъ предъидущій перваго отношенія, равенъ своему послѣдующему, т. е., 2^{му} члену, умноженному на знаменателя (§ 113); взявъ вмѣсто 1го члена обоихъ множителей его составляющихъ, найдемъ, что

Произв. крайн. чл. = 2 чл. × знам. × 4 чл.

Произведеніе среднихъ членовъ состоитъ изъ 2го, умноженнаго на 3^{ій}; 3^{й} же членъ, какъ предъидущій втораго отношенія, равенъ своему послѣдующему, т. е. 4^{му}, умноженному на знаменателя; слѣд. взявъ вмѣсто 3го обоихъ множителей, его составляющихъ, получимъ:

Произв. сред. член. = 2 чл. × 4 чл. × знам.

Изъ сего явствуетъ, что произведеніе крайнихъ членовъ и произведеніе среднихъ состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же множителей, и посему должны быть равны.

§ 125. *Опредѣленіе членовъ кратной пропорціи.*

На свойствѣ кратной пропорціи, доказанномъ въ предъидущемъ параграфѣ, основываетшся опредѣленіе одного изъ членовъ оной когда прочіе извѣстны.

Положимъ, что требуется найти четвертый членъ кратной пропорціи, въ которой первые три извѣстны; на прим.

$$45 : 9 = 25 : x.$$

Уже доказано, что произведенiе среднихъ членовъ равно произведенiю крайнихъ. Въ сей пропорцiи произведенiе среднихъ равно 225, слѣд. и произведенiе крайнихъ также равно 225; но одинъ изъ оныхъ равенъ 45, слѣд. другой, т. е., искомый членъ долженъ быть равенъ 225, раздѣленнымъ на 45, или $x = 5$; и такъ

$$45 : 9 = 25 : 5,$$

слѣд. чтобъ найти четвертый членъ надлежитъ произведенiе среднихъ раздѣлить на первый членъ.

Можно найти четвертый членъ еще другимъ образомъ, основываясь на равенствѣ отношенiй. Въ 1мъ отношенiи предъидущiй болѣе послѣдующаго въ 5 разъ; слѣд. и во второмъ предъидущiй членъ долженъ быть болѣе послѣдующаго въ 5 разъ; слѣд. чтобъ найти четвертый членъ, должно 25 раздѣлить на 5, и частное 5 будетъ искомое число.

Положимъ теперь, что требуется опредѣлить третiй членъ кратной пропорцiи, въ которой всѣ прочiе члены извѣстны; на прим.

$$36 : 12 = x : 10.$$

Произведенiе крайнихъ равно 360, слѣд. и произведенiе среднихъ равно 360. Одинъ изъ среднихъ равенъ 12, слѣд. другой долженъ

быть равенъ найденному произведенію, раздѣленному на 12, т. е. $x = 30$; и такъ

$$36 : 12 = 30 : 10.$$

слѣд. чтобъ найти третій членъ кратной пропорціи, надлежитъ произведеніе крайнихъ раздѣлить на вторый членъ.

Подобнымъ же образомъ выводится, что первый членъ равенъ произведенію среднихъ, раздѣленному на четвертый, а вторый равенъ произведенію крайнихъ, раздѣленному на третій.

Изъ вышедоказаннаго можно вывесть слѣдующее заключеніе: *если въ кратной пропорціи одинъ изъ крайнихъ членовъ неизвѣстенъ, то для опредѣленія онаго надлежитъ произведеніе среднихъ раздѣлить на другой крайній; если же одинъ изъ среднихъ неизвѣстенъ, то для опредѣленія онаго слѣдуетъ произведеніе крайнихъ раздѣлить на извѣстный средній членъ.*

§ 126. *Сокращеніе членовъ кратной пропорціи.*

Пусть будетъ данная кратная пропорція:

$$36 : 24 = 39 : x.$$

Разсмотримъ, какіе члены можно сокращать не нарушая пропорціи:

I. Въ § 116 было доказано, что знаменатель отношенія не перемѣняется, если оба члена раздѣлятся на одно и тоже число. 36 и 24 дѣлятся на общаго дѣлителя 12. По раздѣленіи на 12, данная пропорція приметъ слѣдующій видъ:

$$3:2=39:x.$$

Поелику знаменатель перваго отношенія не перемѣнился, то и отношеніе между 39 и искомымъ числомъ не перемѣнилось; слѣд. и неизвѣстное число также не перемѣнилось. Очевидно, что оное изъ второй пропорціи удобнѣе опредѣляется, нежели изъ первой.

Изъ 1й: $x=\frac{24\times39}{36}=\frac{936}{36}=26.$

Изъ 2й; $x=\frac{2\times39}{3}=\frac{78}{3}=26.$

И такъ 1й членъ пропорціи можетъ быть сокращаемъ со 2мъ.

II. Если раздѣлимъ 1й членъ, то знаменатель перваго отношенія уменьшится; оный также уменьшится и во второмъ отношеніи во столько же разъ, если 3й членъ будетъ раздѣленъ на тоже число; изъ сего слѣдуетъ, что если 1й и 3й члены раздѣлятся на одно и тоже число, то знаменатели отношенія хотя измѣнятся, но останутся равными, потому что уменьшаются въ одинаковое число

равъ; изъ равенства же отношеній слѣдуетъ, что пропорція не нарушится. И такъ 1^{й} членъ можетъ быть еще сокращаемъ съ 3^{мъ}.

Пусть будетъ пропорція:

$$125 : 55 = 75 : x.$$

Раздѣливъ 1^{й} и 3^{й} члены на общаго дѣлителя 25, получимъ:

$$5 : 55 = 3 : x.$$

Раздѣливъ первые два члена на 5:

$$1 : 11 = 3 : x.$$

$$\text{слѣд.}\quad x = \frac{11 \times 3}{1} = 33.$$

Изъ данной же пропорціи:

$$x = \frac{55 \times 75}{125} = \tfrac{4125}{125} = 33.$$

Здѣсь сомнѣніе можетъ быть отъ того, что 3^{ій} членъ, отъ котораго 4^{й} зависитъ, уменьшенъ; но сіе сомнѣніе исчезнетъ, если будетъ обращено вниманіе на 1^{й} членъ, который также уменьшится. И такъ, хотя множитель 75, отъ котораго неизвѣстное число зависитъ (ибо $x = \frac{55 \times 75}{125}$) уменьшенъ, но и дѣлитель 125 уменьшенъ во столько же разъ, а посему искомое число не измѣнится.

Такимъ же образомъ можно доказать, что
2^{й} членъ сокращается съ 1^{мъ} и 4^{мъ};
3^{й} членъ сокращается съ 1^{мъ} и 4^{мъ};
4^{й} членъ сокращается со 2^{мъ} и 3^{мъ}.

Или вообще: *каждый изъ крайнихъ членовъ можетъ быть сокращаемъ съ каждымъ изъ среднихъ, и обратно: каждый изъ среднихъ можетъ быть сокращаемъ съ каждымъ изъ крайнихъ.*

§ 127. *Перемѣщеніе членовъ кратной пропорціи.*

Теперь надлежитъ изслѣдовать, какимъ образомъ члены кратной пропорціи могутъ быть перемѣщаемы безъ нарушенія оной.

Пусть будетъ данная пропорція:

$$I.\ 30 : 15 = 24 : 12.$$

Переставивъ средніе члены, пропорція приметъ слѣдующій видъ:

$$II.\ 30 : 24 = 15 : 12.$$

Чтобъ доказать вѣрность сей пропорціи, надлежитъ доказать, что предъидущіе члены данной пропорціи (30 и 24) содержатся между собою, какъ ихъ послѣдующія (15 и 12).

Первый членъ пропорціи состоитъ изъ втораго, умноженнаго на знаменателя (§ 113) а третій изъ четвертаго, умноженнаго также на знаменателя. Изъ сего слѣдуетъ, что если первый членъ раздѣлится на знаменателя, то получится въ частномъ второй членъ; если же третій членъ раздѣлится на знаменателя, то въ частномъ получится 4

членъ; но выше было доказано, что если два числа будутъ раздѣлены (§ 116) на одно и тоже число, то отношеніе между полученными числами должно быть равно отношенію между данными; а изъ сего и слѣдуетъ, что отношеніе между 1^{мъ} и 3^{мъ} членами должно быть равно отношенію между 2^{мъ} и 4^{мъ}; слѣд. средніе члены могутъ быть переставлены безъ нарушенія пропорціи.

Въ данной пропорціи знаменатель отношенія равенъ 2; раздѣливъ на оный предъидущіе члены 30 и 24, получимъ въ частныхъ 15 и 12, т. е. послѣдующіе члены; слѣд. (§ 116) предъидущія члены 30 и 24 должны относиться между собою какъ послѣдующіе 15 и 12; слѣд. изъ оныхъ можно составить пропорцію.

Очевидно, что пропорція не нарушится, если первое отношеніе сдѣлать вторымъ, и второе первымъ; ибо знаменатели отношеній останутся равными.

Итакъ первая пропорція можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$\text{III.} \quad 24 : 12 = 30 : 15.$$

а вторая:

$$\text{IV.} \quad 15 : 12 = 30 : 24.$$

Изъ самаго свойства кратной пропорціи слѣдуетъ, что послѣдующій членъ 1го отношенія во столько разъ болѣе или менѣе сво-

его предъидущаго, во сколько разъ послѣдующій членъ 2го отношенія болѣе или менѣе своего предъидущаго, т. е., послѣдующій членъ 1го отношенія долженъ относиться къ своему предъидущему, какъ послѣдующій членъ 2го отношенія къ своему предъидущему.

Основываясь на семъ можно представить данную пропорцію еще въ четырехъ новыхъ видахъ, сдѣлавъ въ каждой изъ вышеупомянутыхъ четырехъ пропорцій послѣдующіе члены предъидущими, а предъидущіе послѣдующими:

Изъ 1^{й} получится V. $15 : 30 = 12 : 24$
Изъ 2^{й} ——— VI. $24 : 30 = 12 : 15$
Изъ 3^{й} ——— VII. $12 : 24 = 15 : 30$
Изъ 4^{й} ——— VIII. $12 : 15 = 24 : 30$.

§ 128. *О непрерывной кратной пропорціи.*

Въ кратной пропорціи, такъ какъ въ разностной, средніе члены могутъ быть равны; на примѣръ:

$$3 : 7 = 7 : 16\tfrac{1}{3}.$$

Въ такомъ случаѣ кратная пропорція также называется *непрерывною*, а каждый изъ среднихъ членовъ *среднимъ кратнымъ числомъ* (или среднимъ геометрическимъ числомъ.)

Правила, выведенныя для кратной пропорціи вообще, могутъ быть всѣ примѣнены и къ непрерывной кратной пропорціи.

§ 129. *О сложной кратной пропорціи.*

I. Если сходственные члены двухъ или болѣе пропорцій, имѣющихъ одинакихъ знаменателей, будутъ сложены, то суммы ихъ также составятъ пропорцію.

Пусть будутъ данныя кратныя пропорціи:

$$\begin{array}{c} 12 : 8 = 9 : 6 \\ 18 : 12 = 3 : 2 \\ \hline 30 : 20 = 12 : 8 \end{array}$$

Сложивъ сходственные члены, получимъ два сложныя отношенія, коихъ знаменатели равны, ибо (§ 118) равны знаменателямъ отношеній первой пропорціи; а изъ сего слѣдуетъ, что изъ оныхъ можно составить пропорцію.

II. Если сходственные члены двухъ или болѣе кратныхъ пропорцій будутъ умножены, то произведенія ихъ также составятъ пропорцію.

Пусть будутъ даны кратныя пропорціи:

$$\begin{array}{c} 3 : 5 = 9 : 15 \\ 8 : 2 = 20 : 5 \\ \hline 24 : 10 = 180 : 75. \end{array}$$

Знаменатель перваго сложнаго кратнаго отношенія равенъ произведенію изъ знаменателей данныхъ кратныхъ отношеній (§ 118);

также знаменатель втораго сложнаго отношенія равенъ таковому же произведенію; слѣд. они равны; а посему изъ сложныхъ отношеній можно составить пропорцію.

Пропорціи, составленныя изъ суммъ или произведеній сходственныхъ членовъ двухъ или болѣе кратныхъ пропорцій, называются *сложными*.

§ 130. *О видоизмѣненіяхъ кратной пропорціи*

Если въ какой нибудь кратной пропорціи:

$$7:3=21:9$$

къ предъидущимъ членамъ придадутся послѣдующіе, то составится новая пропорція:

$$7+3:3=21+9:9,$$

или $$10:3=30:9;$$

ибо, придавъ къ первому члену перваго отношенія второй членъ, увеличиваемъ знаменателя перваго отношенія единицею, поелику второй членъ долженъ въ суммѣ содержаться единицею болѣе разъ. По той же причинѣ и знаменатель втораго отношенія увеличится единицею; слѣд. отношенія останутся равными, и посему составятъ пропорцію.

И такъ I. *Сумма членовъ перваго отношенія относится ко второму члену того же отношенія, какъ сумма членовъ*

втораго отношенія относится ко второму члену тогоже отношенія.

Переставивъ средніе члены производной новой пропорціи (§ 127, II) получимъ:

$$7+3:21+9=3:9,$$

т. е. II. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ членовъ втораго, какъ вторый членъ перваго относится ко второму члену втораго.*

Если въ данной пропорціи изъ предъидущихъ членовъ вычтутся послѣдующіе, то составится новая пропорція:

$$7-3:3=21-9:9.$$

Отнявъ отъ перваго члена перваго отношенія вторый членъ, уменьшимъ знаменателя единицею: ибо вторый членъ долженъ въ разности содержаться однимъ разомъ менѣе. По той же причинѣ и во второмъ отношеніи знаменатель уменьшится единицею; слѣд. отношенія останутся равными, и посему изъ оныхъ можно составить пропорцію.

И такъ III. *разность членовъ перваго отношенія относится ко второму члену того же отношенія, какъ разность членовъ втораго отношенія ко второму члену тогоже отношенія.*

Переставивъ въ послѣдней пропорціи средніе члены, получимъ:

$$7 - 3 : 21 - 9 = 3 : 9,$$

т. е., IV. *разность членовъ перваго относится къ разности членовъ втораго, какъ вторый членъ перваго отношенія ко второму втораго.*

Сравнивъ вторую и четвертую пропорціи:

$$7 + 3 : 21 + 9 = 3 : 9.$$

$$7 - 3 : 21 - 9 = 3 : 9.$$

увидимъ, что V. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ членовъ втораго, какъ разность членовъ перваго отношенія относится къ разности членовъ втораго;* потому что оба отношенія равны одному и тому же третьему, а именно: отношенію между послѣдующими членами. И такъ

$$7 + 3 : 21 + 9 = 7 - 3 : 22 - 9.$$

Переставивъ въ сей послѣдней пропорціи средніе члены, получимъ:

$$7 + 3 : 7 - 3 = 21 + 9 : 21 - 9;$$

слѣд. VI. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ разности между оными.*

Примѣчаніе. Кратная пропорція имѣетъ весьма много подобныхъ видоизмѣненій. Здѣсь показаны только тѣ, которыя въ послѣдствіи необходимо будутъ нужны.

ОТДѢЛЕНІЕ V.

О ТРОЙНЫХЪ ПРАВИЛАХЪ.

ГЛАВА I.

ПРОСТОЕ ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО.

§ 131. *О составленіи кратной пропорціи изъ условій данной задачи.*

Въ послѣдней главѣ были изслѣдованы нѣкоторыя свойства кратной пропорціи; теперь надлежитъ узнать, какимъ образомъ оныя примѣняются къ рѣшенію задачъ, въ общежитіи часто встрѣчающихся.

Задача. 5 *аршинъ сукна куплено за* 45 *рублей; спрашивается сколько слѣдуетъ заплатить за* 16 *аршинъ.*

Для удобнѣйшаго соображенія данныя числа могутъ быть написаны въ слѣдующемъ видѣ:

5 аршинъ 45 руб.

16 аршинъ x руб.

Чтобъ найти цѣну 16 аршинъ, надлежитъ сперва узнать цѣну одного; одинъ аршинъ въ 5 разъ менѣе стоитъ нежели 5 аршинъ: и такъ должно цѣну 5 аршинъ, т. е., 45 руб.

раздѣлить на 5, и частное, 9 руб., будетъ искомое число. Если 1 аршинъ стоитъ 9 руб.; то за 16 аршинъ должно заплатить въ 16 разъ болѣе; слѣд. надлежитъ 9 руб. умножить на 16, и найденное произведеніе 144 руб. должно быть искомымъ числомъ.

Сіе число можно найти еще другимъ образомъ. За 5 аршинъ заплачено 45 руб; слѣд. за 16 аршинъ должно заплатить болѣе, и во столько разъ болѣе, во сколько 16 аршинъ болѣе 5 аршинъ. 16 аршинъ болѣе 5 аршинъ въ $3\frac{1}{5}$ раза; слѣд. надлежитъ 45 руб. умножить на $3\frac{1}{5}$, и найденное произведеніе 144 руб. будетъ искомая цѣна 16 аршинамъ.

Сіи рѣшенія просты и ясны, но не всегда удобны для выкладки, по причинѣ большихъ дробей, которыя могутъ встрѣчаться.

Положимъ, что *нѣкто въ 47 часовъ проѣзжаетъ 483 версты; сколько верстъ проѣдетъ въ 67 часовъ, если будетъ ѣхать съ такою же скоростію?*

Узнаемъ сперва, сколько верстъ путешественникъ проѣзжаетъ въ 1 часъ. Для сего должно 483 раздѣлить на 47, и частное, $\frac{483}{47} = 10\frac{13}{47}$, покажетъ, сколько верстъ онъ проѣзжаетъ въ 1 часъ. Умноживъ $10\frac{13}{47}$ верстъ на 67, получимъ $688\frac{24}{47}$, и сіе число верстъ будетъ искомое.

Подобныя же затрудненія встрѣтятся и при второмъ способѣ, ибо 47 не содержится цѣлое число разъ въ 67.

Въ таковыхъ случаяхъ кратная пропорція доставляетъ большое облегченіе. Разсмотримъ, какимъ образомъ она можетъ быть примѣнена къ рѣшенію сей задачи.

Очевидно, что въ большее число часовъ путешественникъ проѣдетъ большее число верстъ, и во столько разъ болѣе, во сколько 67 болѣе 47; слѣд. искомое число верстъ должно быть болѣе 483 верстъ во столько разъ, во сколько 67 болѣе 47; и такъ

$$x^{в} : 483^{в} = 67^{ч} : 47.^{ч}$$

слѣд. (§ 125) $x = \frac{483 \times 67}{47} = 688\frac{25}{47}$ вер.

Дѣйствіе сіе представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^{в} : 483^{в} = 67^{ч} : 47^{ч}$$

```
   67
 ----
 3381
2898
-----
32361 | 47
 282  | 688
 ---
  416
  376
  ---
   401
   376
   ---
    25
```

И такъ $x = 688\frac{24}{37}$ верстамъ.

Если члены пропорціи сокращаются (§ 126), то сіе должно непремѣнно сдѣлать, ибо чрезъ таковое сокращеніе выкладки облегчаются.

Задача. *Куплено 140 аршинъ холста за 255 руб.; сколько должно заплатить за 287 аршинъ холста такой же доброты?*

Разбирая сію задачу, какъ предъидущую, можно изъ оной составить слѣдующую пропорцію.

$$x^{\text{р}} : 255^{\text{руб.}} = 287^{\text{ар.}} : 140^{\text{ар.}}$$

По сокращеніи $2^{\text{го}}$ и $4^{\text{го}}$ членовъ на 5 будетъ:

$$x : 51 = 287 : 28.$$

По сокращеніи $3^{\text{го}}$ и $4^{\text{го}}$ членовъ на 7 получится пропорція:

$$x : 51 = 41 : 4.$$

$$\text{слѣд. } x = \frac{51 \times 41}{4} = 522\tfrac{3}{4} \text{ руб.}$$

Примѣчаніе. Нѣтъ необходимости переписывать пропорціи; сокращеніе сіе представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{ccccc} & 51 & & 41 & \overset{4}{\cancel{28}} \\ x : & \cancel{255} & = & \cancel{287} & : \cancel{140} \end{array}$$

§ 132. *Опредѣленіе тройнаго правила.*

Во всѣхъ задачахъ, рѣшенныхъ въ предъидущемъ параграфѣ, находилось три извѣстныхъ числа, изъ коихъ два одного рода, а третіе

другаго рода; требовалось найти четвертое, одного рода съ третьимъ, и составляющее съ онымъ отношеніе, равное отношенію первыхъ двухъ чиселъ. Правило, по которому рѣшаются подобныя задачи, т. е., пріискивается къ даннымъ тремъ четвертое пропорціональное число, называется *тройнымъ*.

Во всѣхъ задачахъ неизвѣстное число, составлявшее первый членъ перваго отношенія, соотвѣтствовало первому члену втораго отношенія, а однородный съ онымъ второй членъ перваго отношенія соотвѣтствовалъ второму члену втораго отношенія.

Обяснимъ сіе примѣромъ. Въ 1ой задачѣ искомое число рублей соотвѣтствовало числу аршинъ (16 аршинъ), которые на оные деньги должно было купить, точно такъ, какъ второй членъ перваго отношенія (45 руб.) соотвѣтствовалъ 2му члену втораго отношенія (9 аршинъ).

Изъ сего явствуетъ, что въ сей задачѣ неизвѣстное число и извѣстное тогоже рода находятся въ прямомъ отношеніи съ прочими двумя данными числами; но это не всегда бываетъ.

Задача. *На пару платья потребно $4\frac{1}{4}$ аршина, шириною въ $1\frac{7}{8}$ ар.; сколько нужно имѣть сукна шириною въ $2\frac{1}{8}$ аршина на таковое же платье?*

Очевидно, чѣмъ шире сукно, тѣмъ менѣе нужно онаго имѣть, и во столько разъ менѣе, во сколько оно шире: изъ сего слѣдуетъ, что неизвѣстное число во столько разъ менѣе $4\frac{1}{4}$ аршинъ, во сколько $2\frac{1}{8}$ ар. болѣе $1\frac{7}{8}$ ар., или, что все равно, во сколько $1\frac{7}{8}$ менѣе $2\frac{1}{8}$. И такъ

$$x^{\text{ар.}} : \tfrac{17}{4}^{\text{ар.}} = \tfrac{15}{8}^{\text{ар.}} : \tfrac{17}{8}^{\text{ар.}}$$

по умноженіи 3го и 4го членовъ на 8, будетъ:

$$x : \tfrac{17}{4} = 15 : 17.$$

По сокращеніи 2го и 4го членовъ на 17, получимъ:

$$x : \tfrac{1}{4} = 15 : 1$$

И такъ $x = 15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ аршинамъ.

Въ семъ примѣрѣ неизвѣстное число и извѣстное того же рода находятся съ прочими числами въ *обратномъ* отношеніи.

§ 133. *Правила для составленія кратной пропорціи изъ чиселъ данной задачи.*

Изъ предъидущихъ параграфовъ можно вывести слѣдующія правила для рѣшенія подобныхъ задачъ.

I. *Сперва должно написать задачу, для удобнѣйшаго обозрѣнія такъ, чтобъ числа одного рода были помѣщены одно подъ другимъ.*

II. *Надлежитъ разсмотрѣть, находится ли неизвѣстное число и извѣстное того же рода, въ прямомъ или обратномъ отношеніи съ прочими двумя данными числами.*

III. *Въ одномъ отношеніи могутъ быть помѣщаемы только числа одного рода.*

IV. *Нашедши два равныя отношенія, должно составить изъ оныхъ кратную пропорцію.*

V. *Наконецъ, надлежитъ опредѣлять искомый членъ по вышеизложеннымъ правиламъ* (§ 125).

§ 134. *Раздѣленіе тройнаго правила на простое и сложное.*

Въ предъидущихъ задачахъ неизвѣстное число зависѣло отъ трехъ данныхъ чиселъ, изъ коихъ два одного рода, а третіе однородное съ неизвѣстнымъ. Иногда же случается, что искомое число зависитъ отъ большаго числа извѣстныхъ чиселъ. На примѣръ: 20 *работниковъ въ* 5 *дней выработали* 175 *рублей; сколько должны получить* 40 *работниковъ въ* 15 *дней.* Здѣсь неизвѣстное число рублей зависитъ отъ двухъ чиселъ работниковъ, отъ двухъ чиселъ дней и отъ одного числа рублей, слѣд. отъ 5 чиселъ.

Въ данной задачѣ можно присоединить еще одно условіе, на прим. полагая что ежедневная работа была различна, т. е. пусть первые работали ежедневно по 12 часовъ, а послѣдніе только по 9 часовъ. Въ такомъ случаѣ неизвѣстное число рублей зависитъ отъ двухъ чиселъ работниковъ, отъ 2 чиселъ дней, 2 чиселъ часовъ и одного числа рублей. И такъ неизвѣстное число можетъ зависѣть отъ 3, 5, 7 и болѣе данныхъ чиселъ, если прибавятся еще какія нибудь новыя условія, и на семъ различіи основывается раздѣленіе тройнаго правила на *простое* и *сложное*.

Если неизвѣстное число зависитъ отъ 3 чиселъ, то въ такомъ случаѣ правило, по которому задача рѣшается, называется *простымъ тройнымъ правиломъ*; если же неизвѣстное число зависитъ отъ 5, 7 и т. д. данныхъ чиселъ, то правило, по которому опредѣляется искомое число, называется *Сложнымъ тройнымъ правиломъ*.

ГЛАВА II.

Сложное тройное правило.

§ 135. *Сложное тройное правило, зависящее отъ 5 данныхъ чиселъ.*

Задача. *Съ 2500 рублей получено въ 10 мѣсяцевъ 250 руб. прибыли: сколько должно получить прибыли съ 4000 руб. въ 7 мѣсяцевъ?*

2500 руб. 10 мѣсяц. 350 руб.

4000 руб. 7 мѣсяц. x руб.

Положимъ, что 4000 руб. находились въ оборотѣ также 10 мѣсяцевъ, то съ оной суммы получили бы прибыли болѣе 350 руб., и во столько разъ болѣе, во сколько 4000 руб. болѣе 2500 руб.; слѣд.

$$x^{р} : \overset{70}{\cancel{350}}^{р} = \overset{8}{\cancel{4000}}^{р} : \overset{1}{\cancel{2500}}^{р}$$

и $x = 70 \times 8 = 560$ руб.

И такъ съ 4000 руб. должно получить въ 10 мѣсяцевъ прибыли 560 руб.; но какъ 4000 руб. были въ оборотѣ только 7 мѣсяцевъ, а не 10, то и прибыль должна быть менѣе 560 руб., и во столько разъ менѣе, во сколько 7 менѣе 10; слѣд.

$$x^{р} : 56\not{0}^{р} = {}^{м}7 : 1\not{0}^{м.}$$

и $x = 56 \times 7 = 392$ руб.

Надлежитъ замѣтить, что въ сей задачѣ отношеніе между неизвѣстнымъ числомъ и извѣстнымъ тогоже рода, находится въ прямомъ отношеніи съ прочими числами; ибо во сколько разъ болѣе капиталъ, во столько же разъ и прибыль должна быть болѣе, и во сколько разъ время уменьшается, во столько же разъ и прибыль должна уменьшаться.

Въ слѣдующей задачѣ легко замѣтить, что неизвѣстное число съ извѣстнымъ того же рода находится въ обратномъ отношеніи съ прочими числами.

Задача. 500 *работниковъ вырыли извѣстной величины ровъ въ 4 мѣсяца, работая ежедневно по 12 часовъ; во сколько мѣсяцевъ выроютъ такой же ровъ 200 работниковъ, работая ежедневно по $7\frac{1}{2}$ часовъ?*

Положимъ, что послѣдніе работники занимаются ежедневно работою тоже 12 часовъ, то имъ нужно имѣть болѣе времени, потому что ихъ менѣе; и во столько разъ болѣе 4 мѣсяцевъ, во сколько 200 менѣе 500, или во сколько 500 болѣе 200; слѣд.

$$x^{м} : \overset{2}{\not{4}}{}^{м} = 5\not{0}\not{0}^{р} : \overset{1}{\not{2}}\not{0}\not{0}^{р}$$

$x = 2 \times 5 = 10$ мѣсяцамъ.

Но сіе найденное число мѣсяцевъ не будетъ искомое, ибо полагали, что послѣдніе работники занимаются работою ежедневно по 12 часовъ; но они работаютъ только по $7\frac{1}{2}$ часовъ; слѣд. имъ надобно имѣть еще болѣе времени, и именно во столько разъ, во сколько 12 болѣе $7\frac{1}{2}$. И такъ.

$$x^{м} : 10^{м} = 12^{ч} : 7\tfrac{1}{2}^{ч}$$

$$\text{или } x : 10 = 12 : \frac{15}{2}$$

$$\text{и } x = 2 \times 4 : \tfrac{1}{2} = 8 : \tfrac{1}{2} = 16 \text{ мѣсяцамъ.}$$

Въ сей задачѣ отношеніе между неизвѣстнымъ числомъ дней и извѣстнымъ зависѣло отъ двухъ обратныхъ отношеній, ибо чѣмъ менѣе работниковъ и чѣмъ менѣе часовъ они ежедневно работаютъ, тѣмъ большее число мѣсяцевъ должно быть употреблено на окончаніе той же работы.

§ 136. *Сложное тройное правило, зависящее отъ 7 данныхъ чиселъ.*

Рѣшеніе задачъ, въ коихъ неизвѣстное число зависитъ отъ 7, 9 и т. д. чиселъ совершенно подобно предъидущимъ, съ тѣмъ только различіемъ, что составляется большее число простыхъ тройныхъ правилъ.

25 *учениковъ могутъ въ* 12 *дней написать* 2700 *страницъ, на каждой по* 28 *строкъ; во сколько дней напишутъ* 35

учениковъ 3600 страницъ, если на каждой должно быть 20 строкъ.

25 учен. 12 дней 2700 стран. 28 строкъ
35 ——— x ——— 3600 ——— 20 ———

Положимъ, что послѣдніе ученики должны также написать 2700 страницъ, и на каждой страницѣ 28 строкъ, то имъ, поелику ихъ болѣе, нужно имѣть менѣе времени, и во столько разъ менѣе, во сколько 35 болѣе 25, или 25 менѣе 35, и такъ

$$x^{\text{д}} : 12^{\text{д}} = \overset{5}{\not{2}\not{5}}{}^{\text{уч.}} : \overset{7}{\not{3}\not{5}}{}^{\text{уч.}}$$

$$x = \frac{12 \times 5}{7} = \tfrac{60}{7} = 8\tfrac{4}{7} \text{ днямъ.}$$

слѣд. 35 учениковъ должны употребить $8\frac{4}{7}$ дней, чтобы написать 2700 страницъ, по 28 строкъ на каждой; но они должны написать 3600 страницъ; слѣд. имъ надобно имѣть болѣе времени, и во столько разъ болѣе, во сколько 3600 болѣе 2700; слѣд.

$$x^{\text{д}} : 8\tfrac{4}{7}^{\text{д}} = \overset{4}{\not{3}\not{6}\not{0}\not{0}}{}^{\text{стр.}} : \overset{3}{\not{2}\not{7}\not{0}\not{0}}{}^{\text{стр.}}$$

$$x = \frac{8\frac{4}{7} \times 4}{3} = \frac{60 \times 4}{7 \times 3} = \tfrac{240}{21} = 11\tfrac{3}{7} \text{ дн.}$$

И такъ 35 учениковъ напишутъ въ $11\frac{3}{7}$ дней 3600 страницъ, и по 28 строкъ на каждой; но имъ слѣдуетъ написать на каждой странице только 20 строкъ; и по сему имъ нужно менѣе времени, и во столько разъ менѣе, во сколько 20 менѣе 28; слѣд.

$$x^{\text{д}} : 11\tfrac{3}{7}^{\text{д}} = 20^{\text{стр.}} : 28^{\text{стр.}}$$

$$\text{или } x : \tfrac{80}{7} = \overset{5}{\cancel{20}} : \overset{7}{\cancel{28}}$$

$$x = \tfrac{80}{7} \times \tfrac{5}{7} = \tfrac{400}{49} = 8\tfrac{8}{49} \text{ дней.}$$

И такъ 35 учениковъ кончатъ заданную работу въ $8\frac{8}{49}$ дней.

§ 137. *Сокращенный способъ рѣшенія сложныхъ тройныхъ правилъ.*

Можно рѣшить послѣднюю задачу еще другимъ сокращеннымъ способомъ. Для сего надлежитъ, какъ выше показано, сперва положить, что послѣдніе ученики должны кончить такую же работу, и въ такомъ случаѣ имъ нужно имѣть менѣе времени и во столько разъ менѣе, во сколько 35 болѣе 25; и такъ

$$x^{\text{д}} : 12^{\text{д}} = 25^{\text{уч.}} : 35^{\text{уч.}}$$

$$\text{слѣд. } x = \frac{12 \times 25}{35} \text{ днямъ.}$$

Здѣсь не нужно искать, какому числу равенъ x, но только означить посредствомъ надлежащихъ знаковъ, какія дѣйствія должны быть произведены для опредѣленія онаго. Найденное дробное число не будетъ искомымъ, потому что между прочими условіями было положено, что послѣдніе ученики пишутъ только 2700 страницъ, но они должны написать 3600 страницъ; слѣд. имъ надобно имѣть болѣе времени и во столько разъ болѣе во сколько 3600 болѣе 2700. И такъ

$$x'^{д} : \frac{12 \times 25^{д}}{35} = 3600^{стр.} : 2700^{стр.}$$

$$\text{и } x' = \frac{12 \times 25 \times 3600}{35 \times 2700} \text{ дн. } (\S\ 86 \text{ и } \S 91).$$

Между прочими условіями было положено, что послѣдніе ученики пишутъ по 28 строкъ на страницѣ; но имъ должно только писать по 20 строкъ; слѣд. имъ не нужно имѣть столько времени, сколько означено найденнымъ дробнымъ числомъ, но менѣе, и во столько разъ менѣе, во сколько 20 менѣе 28; слѣд.

$$x''^{д} : \frac{12 \times 25 \times 3600^{д}}{35 \times 2700} = 20^{стр.} : 28^{стр.}$$

$$\text{и } x'' = \frac{12 \times 25 \times 3600 \times 20}{35 \times 2700 \times 28} \text{ дней.}$$

Извѣстно, что величина дроби не измѣнится, если ея числитель и знаменатель раздѣлятся на одно и то же число, посему можно въ полученномъ дробномъ числѣ уничтожить равныхъ множителей въ числителѣ и знаменателѣ; слѣд.

$$x'' = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times \cancel{25} \times \overset{4}{\cancel{3600}} \times \overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{7}{\cancel{35}} \times \underset{3}{\cancel{2700}} \times \underset{7}{\cancel{28}}} = \frac{400}{49} = 8\tfrac{8}{49} \text{ дн.}$$

Разсмотримъ теперь дробное выраженіе, равное искомому числу.

$$x = \frac{12 \times 25 \times 3600 \times 20}{35 \times 2700 \times 28}.$$

Оное можно разложить на 2 множителя, изъ коихъ первый будетъ цѣлое число 12, а другой дробное выраженіе $\frac{25 \times 3600 \times 20}{35 \times 2700 \times 28}$. Сіе послѣднее можно также разложить на множителей $\frac{25}{35} \times \frac{3600}{2700} \times \frac{20}{28}$; и такъ

$$x = 12 \times \frac{25}{35} \times \frac{3600}{2700} \times \frac{20}{28}.$$

Число 12 есть число, однородное съ неизвѣстнымъ; дробь $\frac{25}{35}$ означаетъ знаменателя обратнаго отношенія между данными числами учениковъ; дробь $\frac{3600}{2700}$ есть знаменатель прямаго отношенія между данными числами страницъ; а $\frac{20}{28}$ есть знаменатель прямаго отношенія между данными числами строкъ.

И такъ *неизвѣстное число равно извѣстному числу того же рода, умноженному на всѣхъ знаменателей отношенія между прочими однородными числами.*

Задача. *Въ Лондонѣ куплено товару на 1000 фунтовъ стерлинговъ; спрашивается сколько рублей ассигнаціями должно заплатить за оный товаръ, если 5 фун. стер. =33 талерамъ прусскимъ; 25 талеровъ прус. =24 рублям. сереб.; 1 рубль сереб.=372 коп.?*

Рѣшеніе. Очевидно, что при данныхъ отношеніяхъ 1000 фунт. стерл. не можно перевести на россійскія деньги, не узнавъ сперва сколько талеровъ прусск. содержится въ оной суммѣ. Талеровъ прусскихъ должно быть болѣе, и именно во сколько разъ 33 болѣе 5; слѣд.

$$x = \frac{1000 \times 33}{5}.$$

Сіе число талеровъ прусск. должно быть опредѣлено въ рубляхъ серебр. Сихъ послѣднихъ будетъ менѣе, и во столько разъ, во сколько 24 менѣе 25; и такъ

$$x' = \frac{1000 \times 33 \times 24}{5 \times 25}.$$

Въ 1 руб. серебр. 372 коп., и такъ, чтобъ опредѣлить сколько копѣекъ заключается въ 1000 ф. стерл., надлежитъ найденное число умножить на 372 (§ 86); слѣд.

$$x'' = \frac{\overset{\overset{8}{200}}{1000} \times 33 \times 24 \times 372}{5 \times 25}.$$

Сдѣлавъ надлежащее сокращеніе, и перемноживъ всѣхъ множителей, найдемъ что

$x'' = 2356992$ коп. или 23569 руб. 92. коп.

ГЛАВА III.

Правила, основанныя на тройномъ правилѣ.

§ 138. *Правило товарищества.*

Задача 1я. *Три купца торговали вмѣстѣ и получили прибыли* 15,600 *руб. Первый внесъ для торгу* 30,000 *руб., второй* 37,500 *руб., а третій* 22,500 *руб.; требуется знать, сколько каждый получитъ изъ общей прибыли?*

Поелику общая прибыль 15.600 руб. получена на общій ихъ капиталъ, посему должно сперва найти сумму ихъ капиталовъ:

30,000 руб.
37,500 —
22,500 —

90,000 руб.

Прибыль перваго должна быть менѣе общей, и во столько разъ, во сколько его капиталъ менѣе общаго капитала;

$$\text{слѣд. } x^{р} : 15{,}600^{р} = \overset{1}{\cancel{3}}\cancel{0},\cancel{000}^{р} : \overset{3}{\cancel{9}}\cancel{0},\cancel{000},$$

$$\text{и } x = \frac{15600}{3} = 5{,}200 \text{ руб.}$$

Прибыль втораго также должна быть менѣе общей, и во столько разъ, во сколько его капиталъ менѣе общаго капитала; слѣд.

$$x^{р} : 15600^{р} = 37500^{р} : 90000,$$

$$\text{и } x = 52 \times 125 = 6500.$$

Прибыль третьяго должна также относиться къ общей прибыли, какъ капиталъ третьяго къ общему капиталу:

$$x^{р} : 15600^{р} = 22500^{р} : 90000^{р},$$

$$\text{и } x = 156 \times 25 = 3900.$$

Если задача вѣрно рѣшена, то найденныя частныя прибыли, вмѣстѣ взятыя, должны составлять общую прибыль.

Прибыль перваго 5200 руб.
——— втораго 6500 ———
——— третьяго 3900 ———

15600 руб.

Цѣль рѣшенія сей задачи состояла въ томъ, чтобъ раздѣлить общую прибыль (15600 р.) на части, пропорціональныя частнымъ вкладамъ.

Правило, по которому рѣшаются подобныя задачи, называется *правиломъ Товарищества* или *правиломъ пропорціональнаго дѣленія*. И такъ *правило товарищества есть такое, по которому одно число дѣ-*

лится на части, пропорціональныя другимъ даннымъ числамъ.

Для рѣшенія задачъ по сему правилу должно наблюдать слѣдующее:

I. *Сложить числа, пропорціонально которымъ требуется раздѣлить одно изъ данныхъ чиселъ.*

II. *Для опредѣленія первой части надлежитъ составить пропорцію: искомая первая часть относится ко всему числу, какъ соотвѣтствующее оной части число къ найденной суммѣ.*

III. *Для опредѣленія второй и прочихъ частей должно составлять подобныя пропорціи.*

Прибавимъ къ предъидущей задачѣ новое условіе, и разсмотримъ, какимъ образомъ она рѣшается въ шакомъ случаѣ.

Задача 2ᵃ. *Тремъ плотникамъ заплачено 480 рублей. Первый работалъ 60 дней, и ежедневно по 6 часовъ; второй 40 дней по 8 часовъ, а третій 10 дней по 12 часовъ; спрашивается, сколько долженъ каждый получить, если имъ будетъ произведена плата, соразмѣрная времени, ими на работу употребленному?*

Здѣсь частная плата не можетъ быть пропорціональна числу дней, потому что

плотники не одинаковое число часовъ работали въ день. И такъ должно сперва узнать, сколько часовъ каждый работалъ, и потомъ уже поступать по правиламъ, выведеннымъ изъ рѣшенія первой задачи.

1й работалъ 60 дней по 6 часовъ или 360 час.
2й ———— 40 ——— 8 ———— 320 ——
3й ———— 10 ——— 12 ———— 120 ——

800 час.

$$x : \overset{в}{4}8\not{0}^{р} = 36\not{0}^{ч} : \overset{т}{8}\not{0}\not{0}^{ч}$$

$$\text{и } x = 6 \times 36 = 216 \text{ руб. — плата } 1^{го}$$

$$x' : \overset{в}{4}8\not{0}^{р} = 32\not{0}^{ч} : \overset{т}{8}\not{0}\not{0}^{ч}$$

$$\text{слѣд. } x' = 6 \times 32 = 192 \text{ руб. — плата } 2^{го}$$

$$x'' : \overset{в}{4}8\not{0}^{р} = 12\not{0}^{ч} : \overset{т}{8}\not{0}\not{0}^{ч}.$$

$$\text{слѣд. } x'' = 6 \times 12 = 72 \text{ руб. — плата } 3^{го}.$$

Сумма найденныхъ чиселъ должна быть равна данному числу.

216 рублей
192 ——
72 ——

480 рублей

Задача 3я. *Для нѣкотораго дѣла употреблены 3 работника, изъ коихъ 1й окончилъ бы оное въ 12 дней, работая въ день*

по 10 часовъ; 2й въ 15 дней, еслибы удѣлялъ въ день по 6 часовъ; 3й въ 9 дней, занимаясь ежедневно по 8 часовъ; спрашивается: 1е, во сколько времени сіи три работника, работая вмѣстѣ, окончатъ это дѣло; 2е, какую часть онаго сдѣлаетъ каждый; и 3е, сколько каждый заработаетъ, когда за всю работу должно заплатить 108 рублей.

Рѣшеніе. I. Первый оканчиваетъ все дѣло въ 12 дней, работая въ день по 10 часовъ, т. е. во 120 часовъ; слѣд. въ 1 часъ можетъ онъ сдѣлать только $\frac{1}{120}$ всего дѣла; 2й употребляетъ на всю работу 15×6 или 90 часовъ, слѣд. въ 1 часъ можетъ онъ произвести только $\frac{1}{90}$ всей работы; а 3й, которому нужно 9 разъ 8 часовъ, или 72 часа, на производство всей работы, въ 1 часъ сдѣлаетъ $\frac{1}{72}$.

И такъ всѣ трое вмѣстѣ въ одинъ часъ сдѣлаютъ $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72}$ всей работы, но $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72} = \frac{3}{360} + \frac{4}{360} + \frac{5}{360} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$; слѣд. въ 1 часъ всѣ 3 работника могутъ произвесть $\frac{1}{30}$ всей работы; изъ сего явствуетъ, что на все дѣло должно имъ имѣть въ 30 разъ болѣе времени, т. е. 30 часовъ.

II. Теперь найдемъ, какую часть работы каждый сдѣлаетъ:

$1^{й}$ въ 1 часъ дѣлаетъ $\frac{1}{120}$ работы; слѣд. въ 30 часовъ, $30 \times \frac{1}{120}$ или $\frac{30}{120}$ или $\frac{1}{4}$.

$2^{й}$ въ 1 часъ производитъ $\frac{1}{90}$ работы; слѣд. въ 30 часовъ, $30 \times \frac{1}{90}$ или $\frac{30}{90}$ или $\frac{1}{3}$.

$3^{й}$ въ 1 часъ можетъ сдѣлать $\frac{1}{72}$ всего дѣла; слѣд. въ 30 часовъ $30 \times \frac{1}{72}$ или $\frac{30}{72}$ или $\frac{6}{12}$.

Сложивъ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{12}$, получимъ $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{6}{12}$ или $\frac{12}{12}$ или 1; изъ сего слѣдуетъ, что рѣшеніе сіе вѣрно.

III. Остается только раздѣлить между ими 108 руб., пропорціонально ихъ работѣ. Первый, сдѣлавшій $\frac{1}{4}$ всей работы долженъ получить четверть 108 руб., т. е. 27 руб.; второй, произведшій $\frac{1}{3}$ всей работы, долженъ имѣть треть 108 руб. или 36 руб.; третій, который сдѣлалъ $\frac{5}{12}$ всей работы, заработалъ $\frac{5}{12}$ отъ 108 или 45 руб. Сложивъ 27 руб., 36. руб. и 45 руб., получимъ всю сумму 108 руб., чѣмъ и доказывается справедливость рѣшенія.

§ 139. *Правило смѣшенія.*

Задача. *Сдѣлано смѣшеніе изъ трехъ сортовъ чаю. Для онаго взято 3 фунта по 15ти руб., 5 фунтовъ по 9 руб., и 10 фунтовъ по 7 руб. за фунтъ; спрашивается, чего долженъ стоить фунтъ смѣшаннаго чаю?*

Чтобъ узнать сіе, надлежитъ сперва узнать, чего стоитъ все количество чаю.

3 фунта	по 15 руб.	стоютъ	15 р. × 3	или	45 руб.
5 ——	9 ——		9 р. × 5	——	45 ——
10 ——	7 ——		7 р. × 10	——	70 ——
18 фунтовъ					160 руб.

И такъ все количество чаю стоитъ 160 руб.; всего же смѣшаннаго чаю 18 фунт.; слѣд. чтобъ найти цѣну одного фунта смѣшаннаго чаю, надлежитъ только 160 раздѣлить на 18; ибо 1 фунтъ стоитъ въ 18 разъ менѣе 18ти фунтовъ.

$$\begin{array}{r|l} 160 & 18 \\ \cline{2-2} 144 & 8\frac{16}{18} \\ \cline{1-1} 16 & \end{array}$$

И такъ одинъ фунтъ смѣшаннаго чаю стоитъ $8\frac{16}{18}$, руб., или 8 руб. $88\frac{8}{9}$ коп. Правило, по которому рѣшаются подобныя задачи, называется *правиломъ смѣшенія*. И такъ, какъ явствуетъ изъ рѣшенія задачи, *правило смѣшенія есть способъ опредѣлять цѣну извѣстной мѣры какого нибудь смѣшенія, зная цѣну вещей оное составляющихъ.*

Чтобъ опредѣлить цѣну извѣстнаго количества какого нибудь смѣшенія, зная количество и цѣну каждаго рода вещей, оное составляющихъ, должно:

I. *Узнать сумму вещей и цѣну оныхъ.*

II. *Раздѣлить второе число на первое, и найденное частное будетъ искомое число.*

Рѣшимъ задачу другаго рода, относящуюся также къ правилу смѣшенія.

Изъ двухъ сортовъ пороха, изъ коихъ перваго сорта фунтъ стоитъ 85 коп., а втораго 69 коп., требуется сдѣлать смѣшеніе, состоящее изъ 10 фунтовъ такъ, чтобъ фунтъ смѣшаннаго пороха стоилъ 73 копѣйки.

По условію самой задачи, въ смѣшеніи долженъ находиться порохъ обѣихъ цѣнъ; слѣд. требуется опредѣлить, въ какомъ отношеніи должны находиться количества различнаго пороха. Положимъ, что смѣшанный порохъ будетъ продаваться по означенной цѣнѣ, т. е., по 73 коп., то на каждый фунтъ пороха перваго сорта, входящій въ составъ смѣшенія, получится убытка 12 коп.; на каждый же фунтъ втораго сорта, содержащійся въ смѣшеніи, будетъ прибыли 4 коп. Изъ сего явствуетъ, что перваго должно быть менѣе въ смѣшеніи, нежели втораго, потому что убытокъ съ перваго болѣе прибыли со втораго. Поелику на каждый фунтъ перваго сорта 12 коп. убытку, а на каждый фунтъ втораго 4 коп. прибыли, то перваго должно

быть менѣе нежели втораго, и во столько разъ менѣе, во сколько 4 менѣе 12, т. е., если втораго сорта возьмемъ 12 фунтовъ, то перваго должно взять только 4 фунта.

Изъ сего слѣдуетъ, что въ каждыхъ 16 фунтахъ смѣшаннаго пороха должно заключаться 4 фунта перваго и 12 фунтовъ втораго. А какъ во всемъ смѣшенiи должно быть 10 фунтовъ, то, чтобъ найти сколько пороха обоихъ сортовъ должно заключаться во всемъ смѣшенiи, надлежитъ составить слѣдующiя пропорцiи:

$$x^{ф} : \overset{1}{\cancel{4}}{}^{ф} = 10^{ф} : \overset{4}{\cancel{16}}{}^{ф} ; x = \tfrac{10}{4}{}^{ф} = 2\tfrac{1}{2}{}^{ф}.$$

$$x'^{ф} : \overset{3}{\cancel{12}} = \overset{5}{\cancel{10}}{}^{ф} : \overset{\cancel{4}\,2}{\cancel{16}}{}^{ф} ; x = \tfrac{15}{2}{}^{ф} = 7\tfrac{1}{2}{}^{ф}.$$

гдѣ x, равный $2\frac{1}{2}$ ф., означаетъ число фун. перваго пороха, а x', равный $7\frac{1}{2}$ ф., означаетъ число фунтовъ втораго пороха.

Повѣрка. $2\frac{1}{2}$ ф. 1го сорта по 85 коп.,	2 руб.	$12\frac{1}{2}$ к.
$7\frac{1}{2}$ ф. 2го сорта по 69 коп.,	5 руб.	$17\frac{1}{2}$ к.
10 ф. смѣшаннаго пороха,	7 руб.	30 к.

слѣд. 10 фунтовъ смѣшаннаго пороха должны стоить 7 руб. 30 коп.; а посему цѣна одного фунта 73 коп.

Изъ сей задачи слѣдуетъ, что должно сдѣлать слѣдующее дополненiе къ опредѣленiю правила смѣшенiя: *правиломъ смѣшенiя так-*

же называется способъ опредѣлять количества смѣшиваемыхъ вещей, зная цѣну извѣстной мѣры смѣшенія и смѣшиваемыхъ вещей.

Для опредѣленія же количества, въ которомъ смѣшиваемыя вещи должны быть взяты, чтобы составить смѣшеніе требуемой цѣны и мѣры, зная цѣну смѣшиваемыхъ вещей, надлежитъ:

I. *Сравнить цѣны смѣшиваемыхъ двухъ вещей съ требуемою среднею цѣною и опредѣлить разности оныхъ.*

II. *Для опредѣленія первой смѣшиваемой вещи должно составить слѣдующую пропорцію: количество первой смѣшиваемой вещи относится ко второй разности, какъ все количество смѣшенія къ суммѣ разностей.*

III. *Для опредѣленія второй смѣшиваемой вещи надлежитъ составить слѣдующую пропорцію: количество второй смѣшиваемой вещи относится къ первой разности, какъ все количество смѣшенія къ суммѣ разностей.*

§ 140. *Заключеніе.*

Въ веденіи было сказано, что числа всѣхъ родовъ составляютъ предметъ Ариѳметики. Разсмотримъ теперь точнѣе, чѣмъ зани-

мается сія наука, и въ какой связи находятся всѣ ея части.

Мы видѣли, что числа суть двоякаго рода: простыя и именованныя, и что оныя раздѣляются еще на цѣлыя и дробныя. Тѣ и другія, какъ величины, могутъ увеличиваться и уменьшаться. Число увеличивается чрезъ прибавленіе къ оному другихъ чиселъ, и такимъ образомъ происходитъ дѣйствіе, называемое *сложеніемъ*. Число можетъ еще увеличиваться и чрезъ повтореніе самаго числа, и дѣйствіе, по которому находится таковая сумма, именуется *умноженіемъ*. Уменьшеніе можетъ быть также произведено двоякимъ образомъ: отниманіемъ *неравныхъ* и *равныхъ* чиселъ, и для опредѣленія искомыхъ чиселъ имѣются два рода вычисленій: *вычитаніе* и *дѣленіе*. Упомянутыя четыре дѣйствія могутъ быть произведены не только съ простыми цѣлыми числами, но также и съ *дробными*. Статья о *именованныхъ числахъ* есть примѣненіе правилъ, выведенныхъ для простыхъ чиселъ, и изъ оной явствуетъ практическая польза предъидущихъ статей.

О какомъ нибудь предметѣ только чрезъ *сравненіе* съ другими можно составить точное и ясное понятіе, посему сравненіе чиселъ между собою необходимо. Изъ сего сравненія выводятся *отношенія* чиселъ, которыя бы-

ваютъ *разностныя* и *кратныя*. Разсматривая однородныя отношенія чиселъ, не трудно замѣтить, что оныя могутъ быть равны, и изъ таковыхъ составляются *пропорціи*, которыя также бываютъ *разностныя* и *кратныя*. На послѣднюю должно обратить особенное вниманіе, ибо на оной основаны правила, называемыя *тройными*, посредствомъ которыхъ рѣшается большая часть практическихъ задачъ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что *Ариѳметика* имѣетъ своимъ предметомъ различные роды вычисленія, которые должны быть производимы для опредѣленія неизвѣстныхъ чиселъ посредствомъ извѣстныхъ, по даннымъ отношеніямъ между оными.

ПРИБАВЛЕНІЕ Iое.

О возвышеніи во вторую и третью степени, и извлеченіи корней тѣхъ же степеней (*).

§ 141. *О возвышеніи въ степени и извлеченіи корней вообще.*

Если какое нибудь число будетъ взято множителемъ два или нѣсколько разъ, то произведеніе, отъ таковаго умноженія происходящее, называется *степенью* даннаго числа. Если данное число взято множителемъ два раза, то получаемое произведеніе именуется *второю степенью* или *квадратомъ* онаго, на прим. 25 есть вторая степень или квадратъ 5, ибо $5 \times 5 = 25$. Если данное число возьмемъ множителемъ три раза, то происходящее отъ того произведеніе называется *третью степенью* или *кубомъ* даннаго числа; на прим. 27 есть кубъ 3, ибо $3 \times 3 \times 3 = 27$. Число показывающее сколько разъ данное число должно быть взято множителемъ, именуется *показа-*

(*) Сія статья помѣщена для тѣхъ, которые въ Уѣздныхъ Училищахъ обучаются Геометріи.

телемъ степени, и ставится надъ даннымъ числомъ: на примѣръ $(6)^2$ значитъ, что число 6 должно быть взято множителемъ 2 раза; слѣд. $(6)^2 = 6 \times 6 = 36$; $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Обратно, если требуется пріискать число, которое должно быть взято множителемъ два или болѣе разъ, для составленія даннаго числа, то искомое называется *корнемъ*. На примѣръ, чтобъ получить число 81, должно 9 взять множителемъ два раза; въ семъ случаѣ 9 называется *корнемъ* даннаго числа. И поелику число 9 должно быть взято дважды множителемъ, то и называется *корнемъ второй степени* или *квадратнымъ корнемъ*.

Если для составленія даннаго числа требуется пріискать число, которое должно быть взято три раза множителемъ, то оно именуется *корнемъ третьей степени* или *кубическимъ корнемъ*. Напримѣръ 2 есть кубическій корень 8ми; ибо $2 \times 2 \times 2 = 8$. Для означенія корня употребляется знакъ $\sqrt{\ }$, надъ которымъ ставится число, показывающее какой степени корень долженъ быть найденъ. И такъ $\sqrt[2]{49}$ означаетъ квадратный корень 49ти, а $\sqrt[3]{64}$ кубическій корень 64хъ. При семъ надлежитъ еще замѣтить, что показатель квадратнаго корня не пишется, но подразумѣвается.

§ 142. *О возвышенiи во вторую степень.*

Возвышенiе одночленныхъ чиселъ во вторую степень не затруднительно; ибо искомыя произведенiя находятся въ таблицѣ умноженiя. Первыя 9 чиселъ и ихъ вторыя степени или квадраты суть:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Для возвышенiя двучленнаго числа, надлежитъ только умножить оное само на себя. Такъ на прим., квадратъ 25ти$=25\times25=625$. Чтобы узнать, изъ какихъ частей составленъ найденный квадратъ, произведемъ умноженiе по частямъ. Данное число 25 состоитъ изъ двухъ членовъ, т. е., 2 десятковъ и 5 единицъ; слѣд. умножить 25 на 25 значитъ: умножить $(20+5)$ на $(20+5)$. Чтобы сдѣлать сiе умноженiе, должно сперва $20+5$ умножить на 20, и потомъ на 5. И такъ квадратъ даннаго числа состоитъ изъ слѣдующихъ частей:

$20\times20=400$	квадрата 1го члена
$5\times20=100$	произ. изъ 1го чл. на 2й
$20\times5=100$	произ. изъ 2го чл. на 1й
$5\times5=25$	квадрата 2го члена.

Но какъ произведенiе изъ 1го члена на 2й равно (§ 28) произведенiю изъ 2го члена на 1й, то вмѣсто означенныхъ двухъ произведе-

ній можно взять удвоенное произведеніе изъ $1^{го}$ члена на $2^{й}$. И такъ *квадратъ двучленнаго числа состоитъ изъ трехъ частей: I, квадрата перваго члена; II. удвоеннаго произведенія изъ $1^{го}$ члена на $2^{й}$, и III. квадрата втораго члена.*

Чтобы вывести общее выраженіе для возвышенія какого нибудь трехчленнаго числа, на прим. 123, въ квадратъ, надлежитъ сумму первыхъ двухъ членовъ принять за одинъ членъ, и произвести умноженіе, какъ показано въ $1^{мъ}$ примѣрѣ.

И такъ $(123)^2 = (120+3)^2 =$

$120 \times 120 = 14400$ квадрату суммы первыхъ двухъ членовъ;

$3 \times 120 = 360$ произв. изъ третьяго члена на сумму первыхъ двухъ,

$120 \times 3 = 360$ произв. изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на $3^{й}$,

$3 \times 3 = 9$ квадр. $3^{го}$ члена.

Но какъ произведеніе изъ $3^{го}$ члена на сумму первыхъ двухъ равно произведенію изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на $3^{й}$; то изъ сего слѣдуетъ, что квадратъ тречленнаго числа состоитъ изъ: I. квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ, II. удвоеннаго произведенія изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на $3^{й}$, и III. квадрата $3^{го}$ члена.

Но квадратъ суммы первыхъ двухъ членовъ равенъ квадрату перваго члена, сложенному съ удвоеннымъ произведенiемъ изъ перваго члена на вторый и квадратомъ втораго члена; поставивъ равныя величины вмѣсто равныхъ, выведемъ, что квадратъ трехчленнаго числа состоитъ изъ:

I. *квадрата перваго члена,*

II. *удвоеннаго произведенiя изъ* 1го *члена на* 2^{й},

III. *квадрата втораго члена,*

IV. *удвоеннаго произведенiя изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на третiй.*

V. *квадрата третьяго члена.*

Если данное число будетъ четырехчленное, то для составленiя квадрата слѣдуетъ только къ найденному выраженiю для составленiя квадрата трехчленныхъ чиселъ прибавить удвоенное произведенiе изъ суммы первыхъ трехъ членовъ на 4^{й} и квадратъ 4го, и т. д.

Присовокупимъ здѣсь общее замѣчанiе о числѣ знаковъ, долженствующихъ быть въ квадратѣ. Поелику квадратъ меньшаго одночленнаго числа (т. е. 1) есть 1, а меньшаго двучленнаго числа (т. е. 10) есть 100; то изъ сего явствуетъ, что квадраты всѣхъ одночленныхъ чиселъ заключаются между 1 и 100, т. е., изображаются одною или двумя ци-

фрами. Квадратъ меньшаго двучленнаго числа (10) есть 100, а меньшаго трехчленнаго числа (100) есть 10000; слѣд. квадраты двучленныхъ чиселъ заключаются между 100 и 10000, т. е., изображаются тремя или четырмя цифрами, и проч. Для удобнѣйшаго обозрѣнія прилагается слѣдующая таблица:

Если въ корнѣ	1 цифра,	то въ квадратѣ	1 или 2
— — —	2	— — — — —	3—4
— — —	3	— — — — —	5—6
— — —	4	— — — — —	7—8
— — —	5	— — — — —	9—10

и т. д.

Изъ сей же таблицы явствуетъ, что въ квадратѣ должно быть вдвое болѣе знаковъ нежели въ корнѣ, или вдвое болѣе безъ единицы.

Чтобы возвысить простую дробь, на прим. $\frac{7}{9}$ во вторую степень, должно оную также взять множителемъ два раза. И такъ $(\frac{7}{9})^2 = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 9} = \frac{49}{81}$, т. е. *чтобы возвысить простую дробь во вторую степень, слѣдуетъ только числителя и знаменателя возвысить во вторую степень.*

Чтобы возвысить десятичную дробь во вторую степень, также надлежитъ только взять оную множителемъ 2 раза. И такъ $(0,12)^2 = 0,12 \times 0,12 = 0,0144$.

§ 143. *О извлеченіи квадратныхъ корней.*

Если данное число изображается одною или двумя цифрами, то квадратный корень онаго можно иногда найти изъ таблицы умноженія; на прим. квадратный корень 16ти долженъ быть 4, ибо $4 \times 4 = 16$. Но не всякое двучленное число имѣетъ точный квадратный корень; на прим. 30ти квадратный корень долженъ быть болѣе 5, а менѣе 6, ибо $5 \times 5 = 25$, а $6 \times 6 = 36$; данное же число заключается между 25 и 36, слѣд. искомый квадратный корень заключается между 5 и 6. Таковыя числа называются *неизвлекомыми*, а корни оныхъ *несоизмѣримыми*. Способъ опредѣлять таковые квадратные корни точнѣе будетъ ниже изложенъ.

Пусть будетъ 1681 данное многочленное число, коего квадратный корень требуется опредѣлить:

	$\sqrt{1681}$	41
	16	квадр. 1го члена
8	81	
	8	удвоен. произв. изъ 1го члена на 2й
	1	квадратъ втораго члена.

Изъ таблицы, помѣщенной въ предъидущемъ параграфѣ, легко усмотрѣть, что въ искомомъ корнѣ должны быть двѣ цифры (ибо

если бы въ немъ была одна цифра, то въ данномъ числѣ не могло бы быть болѣе 2хъ цифръ; если же примемъ, что въ корнѣ 3 цифры, то данное число должно бы изображаться 6ю или покрайней мѣрѣ 5ью цифрами). И такъ искомый квадратный корень состоитъ изъ десятковъ и единицъ. Въ предъидущемъ § было доказано, что квадратъ двучленнаго числа состоитъ изъ квадрата перваго члена, удвоеннаго произведенія изъ перваго члена на второй и квадрата втораго члена; слѣд. въ данномъ числѣ 1681 должны заключаться всѣ упомянутыя части. Квадратъ перваго члена корня, т. е. десятковъ, заключается въ сотняхъ, ибо при умноженіи десятковъ на десятки всегда получаются сотни: и такъ квадратъ перваго члена искомаго корня долженъ заключаться въ цифрахъ, означающихъ сотни, т. е. въ 16. Квадратный корень сего числа есть 4, ибо $4 \times 4 = 16$, т. е. въ искомомъ корнѣ можетъ быть только 4 десятка. Взявъ квадратъ найденнаго члена корня, получимъ 16 сотенъ; и вычтя оный изъ даннаго числа, будемъ имѣть въ остаткѣ 81, въ которомъ должно еще заключаться удвоенное произведеніе изъ 1го члена на 2й и квадратъ втораго. Произведеніе изъ 1го члена корня (т. е. десятковъ) на 2ый членъ корня (т. е. на единицы) должно непремѣнно за-

ключаться въ однихъ только десяткахъ; слѣд. въ первомъ знакѣ найденнаго остатка. Зная, что удвоенное произведеніе изъ $1^{го}$ члена на $2^{й}$, или что произведеніе изъ удвоеннаго $1^{го}$ члена на $2^{й}$, заключается въ 8 десяткахъ, надлежитъ только 8 (десятковъ) раздѣлить на удвоенный первый членъ, т. е на 8 (десятковъ), чтобы найти второй членъ. Раздѣливъ 8 (десятковъ) на 8 (десятковъ), получимъ 1 для втораго члена корня. Умноживъ удвоенный первый членъ (8 десятковъ) на второй членъ (1 единицу), найдемъ, что удвоенное произведеніе изъ $1^{го}$ члена на $2^{ый}$ равно 8 десятковъ. Чтобы вычесть, подпишемъ подъ десятками найденнаго остатка. Осталось еще взять квадратъ втораго члена, который будетъ равенъ 1 (единицѣ). Вычтя всѣ найденныя числа, получимъ 0 въ остаткѣ. Изъ сего можно заключить, что данное число есть точный квадратъ 41 единицы, ибо изъ онаго по частямъ вычтенъ полный квадратъ 41 единицы; изъ сего же слѣдуетъ, что 41 есть точный квадратный корень даннаго числа.

Примѣръ 2. Извлечь квадратный корень изъ 119025.

```
√11.90.25( 345
    9     квадр. 1го члена
 6 | 290
   | 24 удвоен. произв. изъ 1го члена на 2й
      16 квадр. 2го члена.
   ------
    256
68 | 3425
   | 340 удвоен. произвед. изъ суммы
   |          первыхъ двухъ членовъ на 3й
        25  квадр. 3го члена.
   ------
    3425
```

Изъ сказаннаго въ § 141 явствуетъ, что искомый корень долженъ состоять изъ 3 цифръ, т. е. изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Изъ тогоже § также слѣдуетъ, что въ данномъ числѣ должны заключаться слѣдующія части: квадратъ 1го члена искомаго корня, удвоенное произведеніе изъ 1го члена на 2й, квадратъ 2го, удвоенное произведеніе изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на 3й, и квадратъ 3го. Квадратъ 1го члена искомаго корня, который, какъ выше сказано, долженъ состоять изъ сотенъ, заключается въ десяткахъ тысячъ (ибо 100×100=1000); слѣд. оный содержится въ первыхъ двухъ цифрахъ даннаго числа. Наибольшее квадратное число, въ 11 содержащееся, есть 9; слѣд. первый знакъ

корня есть 3 (сотни). Вычтя изъ 11 (десятковъ тысячъ) квадратъ 3 сотенъ, т. е. 9 десятковъ тысячъ, получимъ въ остаткѣ 2 десятка тысячъ. Вторый знакъ корня означаетъ десятки; слѣд. удвоенное произведеніе изъ перваго члена (сотенъ) на вторый (десятки) заключается въ тысячахъ, т. е. въ 29 (тысячахъ). Раздѣливъ сіе число на удвоенный первый членъ, т. е. на 6 (сотенъ), получимъ въ частномъ 4, которое и будетъ вторымъ членомъ искомаго корня. Умноживъ удвоенный первый членъ 6 (сотенъ) на найденный вторый членъ 4 (десятка), найдемъ, что удвоенное произведеніе изъ перваго члена на вторый равно 24 (тысячамъ). Подпишемъ сіе число подъ тысячами. Теперь слѣдуетъ еще взять квадратъ втораго члена, который равенъ 16 сотнямъ. Подписавъ сіе число надлежащимъ образомъ, сложимъ съ прежде найденнымъ, и получимъ 256 сотенъ. Вычтя сію сумму, будемъ имѣть въ остаткѣ 34 сотни. Въ семъ остаткѣ и остальныхъ двухъ знакахъ даннаго числа (25), т. е. въ 3425 должно заключаться, какъ изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, удвоенное произведеніе изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на 3^{й} и квадратъ 3го. 3^{ій} членъ искомаго корня означаетъ единицы, а удвоенная сумма первыхъ двухъ членовъ состоитъ изъ десятковъ, слѣд.

удвоенное произведеніе изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на третій, заключается въ десяткахъ, т. е. въ 342. Раздѣливъ сіе число на удвоенную сумму первыхъ двухъ членовъ (на 68), получимъ въ частномъ 5 (единицъ), которое и должно быть третьимъ членомъ искомаго корня. Умноживъ 68 (десятковъ) на 5 (единицъ), найдемъ, что удвоенное произведеніе изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на третій равно 340 десяткамъ; умноживъ 5 на 5, получимъ 25 (единицъ), квадратъ третьяго члена. Подписавъ надлежащимъ образомъ и сложивъ, получимъ 3425. Вычтя сію сумму изъ остальной части даннаго числа, будемъ имѣть 0 въ остаткѣ. Изъ сего можно заключить, что данное число есть точный квадратъ найденнаго числа 345, потому что изъ онаго вычтены послѣдовательно всѣ части полнаго квадрата 345^ти^ безъ остатка; изъ сего же слѣдуетъ, что 345 есть точный квадратный корень даннаго числа.

Изъ послѣднихъ двухъ рѣшеній можно извлечь слѣдующія необходимыя замѣчанія для извлеченія квадратныхъ корней.

I. Нашедши первый членъ искомаго квадратнаго корня, нужно было къ остатку прибавить еще двѣ слѣдующія цифры даннаго

числа для опредѣленія втораго члена. Также для опредѣленія третьяго члена искомаго корня надлежало прибавить остальныя двѣ цифры даннаго числа. На семъ основано раздѣленіе даннаго числа, отъ правой стороны къ лѣвой, на грани, состоящія изъ двухъ цифръ. Въ послѣдней можетъ быть также и 1 знакъ. Сіе раздѣленіе даннаго числа на грани служитъ къ опредѣленію числа знаковъ искомаго корня.

II. Чтобъ опредѣлить второй членъ искомаго корня, надлежало удвоенное произведеніе изъ перваго члена на второй раздѣлить на удвоенный первый членъ. Здѣсь нужно замѣтить, что сіе удвоенное произведеніе заключалось въ остаткѣ отъ первой грани и въ *первой* цифрѣ второй. Сіе замѣчаніе относится и ко всѣмъ послѣдующимъ удвоеннымъ произведеніямъ.

Примѣръ 3. Извлечь квадратный корень изъ 43264.

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{4.\,32.\,64}\ (208 \\
 & 4 \\
\hline
40 & |\ 3264 \\
 & \ \ 320 \\
 & \ \ \ \ 64 \\
\hline
 & \ \ 3264 \\
\hline
\end{array}
$$

При рѣшеніи сей задачи должно замѣтить, что если удвоенное произведеніе изъ перваго

члена на второй, т. е. (3) раздѣлимъ на удвоенный первый членъ (4), то получимъ въ частномъ 0, т. е., въ искомомъ корнѣ десятковъ не заключается, и посему надлежитъ поставить въ корнѣ 0 на мѣстѣ десятковъ, и потомъ поступать, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ показано.

Примѣчаніе. При извлеченіи квадратныхъ корней можно сдѣлать слѣдующее сокращеніе: вмѣсто того, чтобы брать квадратъ втораго члена отдѣльно, и потомъ оный прикладывать къ удвоенному произведенію изъ перваго члена на 2й, можно сію сумму получить вдругъ, поставивъ найденный второй членъ подлѣ удвоеннаго перваго и умноживъ потомъ на второй членъ, ибо въ семъ произведеніи непремѣнно должно заключаться и удвоенное произведеніе изъ 1го члена на 2й и квадратъ 2го. Подобнымъ же образомъ надлежитъ поступать при опредѣленіи третьяго и всѣхъ слѣдующихъ членовъ. Чтобъ въ семъ легче увѣриться чрезъ сравненіе, рѣшимъ такимъ образомъ вышеприведенный 2ый примѣръ:

Извлечь квадратный корень изъ 119025.

$\sqrt{11.90.25}$ (345

```
    9
64| 290
  | 256
685| 2425
   | 3425
```

Примѣръ 4. Извлечь квадратный корень изъ 5317636.

$\sqrt{5.31.76.36.}$ (2306

```
   4
43 | 131
   | 129
4606| 27636
    | 27636
```

Изъ предъидущихъ рѣшеній можно вывести слѣдующія правила для извлеченія квадратныхъ корней изъ данныхъ цѣлыхъ чиселъ:

I. *Поставивъ знакъ квадратнаго корня надъ даннымъ числомъ, надлежитъ раздѣлить оное, съ правой стороны къ лѣвой, на грани, полагая въ каждой по 2 цифры, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть и 1 цифра.*

II. *Нашедши наибольшее квадратное число, содержащееся въ первой грани, должно соотвѣтствующій оному квадратный корень, поставить первымъ членомъ искомаго корня.*

III. *Вычесть квадратъ найденнаго перваго члена искомаго квадратнаго корня изъ первой грани.*

IV. *Прибавивъ къ остатку слѣдующую грань, отчеркнуть отъ оной первую цифру (для удвоеннаго произведенія).*

V. *Передъ симъ числомъ поставить удвоенный первый членъ корня, и раздѣлить первое число на второе; найденное частное будетъ вторымъ членомъ корня. Если же первое число менѣе втораго, то ставится* 0 *въ корнѣ.*

VI. *Поставивъ найденный вторый членъ подлѣ удвоеннаго перваго, умножить полученную сумму на вторый членъ.*

VII. *Полученное произведеніе вычесть изъ числа, состоящаго изъ остатка отъ первой грани и второй грани.*

VIII. *Чтобъ найти третій и прочіе члены корня должно поступать точно такъ же, какъ и при опредѣленіи втораго члена, принимая сумму предъидущихъ членовъ корня за одинъ членъ.*

§ 144. *Извлеченіе квадратныхъ корней изъ простыхъ дробей.*

Чтобъ возвысить простую дробь въ квадратъ, надлежитъ (§ 141) возвысить ея числителя и знаменателя во вторую степень.

Изъ сего слѣдуетъ, что для извлеченія квадратнаго корня изъ простой дроби, должно сдѣлать обратное дѣйствіе, т. е. извлечь квадратный корень какъ изъ числителя, такъ и изъ знаменателя, и корень перваго будетъ числителемъ, а втораго знаменателемъ.

Примѣры:

I. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

II. $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

III. $\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10}$

Если же числитель, или знаменатель, или оба члена дроби суть неизвлекомыя числа, то простая дробь обращается въ десятичную, и изъ послѣдней извлекается квадратный корень, какъ будетъ показано въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 145. *Извлеченіе квадратныхъ корней изъ десятичныхъ дробей.*

Пусть будетъ 0,6084, десятичная дробь, изъ которой требуется извлечь квадратный корень.

$$\sqrt{0,60.84}\,(0,78$$

```
      √0,60.84(0, 78
          49
   148 | 1184
       | 1184
```

Поелику въ данномъ числѣ единицъ нѣтъ, то и въ корнѣ не можетъ быть цѣлаго чи-

сла; и такъ должно поставить въ корнѣ 0 цѣлыхъ. Слѣдующій знакъ въ корнѣ означаетъ десятыя доли единицы; а квадратъ десятыхъ заключается въ сотыхъ (ибо $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$), слѣд. квадратъ перваго десятичнаго знака искомаго корня долженъ заключаться въ двухъ первыхъ десятичныхъ знакахъ дроби, т. е., въ 60. Наибольшее квадратное число, въ оныхъ заключающееся, есть 49; квадратный же корень 49 есть 7; слѣд. 7 долженъ быть первымъ десятичнымъ знакомъ искомаго корня. Взявъ квадратъ найденнаго члена и вычтя изъ соотвѣтствующихъ знаковъ данной дроби, получимъ въ остаткѣ 11. Вторый десятичный знакъ искомаго корня означаетъ *сотыя* доли единицы; квадратъ сотыхъ долей даетъ десятитысячныя доли (ибо $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$); слѣд. нужно снести остальные двѣ цифры данной десятичной дроби, чтобы опредѣлить 2ый десятичный знакъ искомаго корня. Въ 1184 должно содержаться удвоенное произведеніе изъ перваго члена корня на вторый, и квадратъ втораго. Поелику первый членъ состоитъ изъ десятыхъ, а 2й изъ сотыхъ, то изъ сего слѣдуетъ, что удвоенное произведеніе должно содержаться въ тысячныхъ доляхъ, т. е. въ остаткѣ отъ первой грани, и первой цифрѣ второй. Удвоенный первый членъ 14 въ 118 содержится 8 разъ, и такъ 8 есть

второй десятичный знакъ искомаго корня. Прибавивъ 8 къ 14 и умноживъ 148 на 8, получимъ въ произведеніи (означающемъ удвоенное произведеніе изъ перваго члена на второй и квадратъ втораго) 1184. Вычтя сіе число отъ оставшейся части данной десятичной дроби, получимъ 0 въ остаткѣ, что и означаетъ, что 0,78 есть точный квадратный корень данной дроби.

Изъ послѣдняго рѣшенія явствуетъ, что правила для извлеченія квадратныхъ корней изъ десятичныхъ дробей суть тѣже самыя, какія были выведены для извлеченія квадратныхъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ, съ тѣмъ только различіемъ, что при извлеченіи квадратныхъ корней изъ десятичной дроби, сія послѣдняя раздѣляется на грани отъ лѣвой стороны къ правой, начиная отъ запятой, и полагая также по 2 цифры въ каждой грани. Можетъ случиться, что для послѣдней грани останется одна цифра, если число оныхъ въ данной десятичной дроби будетъ нечетное: въ такомъ случаѣ прибавляется 0 къ данной дроби, чтобъ пополнить послѣднюю грань; дробь же, какъ извѣстно изъ предъидущаго (§ 97), не перемѣнитъ своей величины.

Примѣръ. Извлечь квадратный корень изъ 0,6.

```
√0, 60 (0, 7
   49
   ——
   11
```

Здѣсь надлежитъ замѣтить, что данная десятичная дробь должна быть сперва приведена въ сотыя доли, потому что квадратъ десятыхъ, изъ которыхъ искомый квадратный корень долженъ состоять, заключается не въ десятыхъ, а въ сотыхъ (ибо $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$); потомъ же надлежитъ поступать по вышеизложеннымъ правиламъ.

Если данное число состоитъ изъ цѣлаго числа съ десятичною дробью, то цѣлое число раздѣляется на грани отъ правой стороны къ лѣвой, начиная отъ запятой, а десятичная дробь отъ лѣвой къ правой.

Примѣръ. Извлечь квадратный корень изъ 534,5344.

```
√5. 34, 53. 44 (23, 12
 4
 ————
43  |134
    |129
    ————
461  |553
     |461
     ————
4622  |9244
      |9244
      ————
```

§ 146. *Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней изъ неизвлекомыхъ чиселъ.*

Въ § 143 было упомянуто, что изъ нѣкоторыхъ чиселъ точнаго квадратнаго корня извлечь не можно: на прим. квадратный корень 5 долженъ заключаться между 2мя и 3мя, ибо число 5 заключается между квадратами 2хъ и 3хъ, то есть между 4 и 9. Если же требуется найти квадратный корень точнѣе, то должно искать, сколько въономъ содержится десятыхъ долей единицы. Поелику квадратъ десятыхъ содержится въ сотыхъ, то надлежитъ остатокъ (1 единицу) привесть въ сотыя, и поступать для опредѣленія 2го члена корня какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ.

```
V 5( 2, 2
  4
42|100
  | 84
   16
```

Изъ сего рѣшенія видно, что въ искомомъ квадратномъ корнѣ, сверхъ двухъ единицъ, должно быть еще двѣ десятыхъ. Чтобъ опредѣлить, сколько сотыхъ въ корнѣ, надлежитъ къ остатку прибавить еще 2 нуля, т. е., привести въ десятитысячныя доли

(ибо $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$), и потомъ поступать по предъидущему.

```
√‾5‾ ( 2, 23...
  4
‾‾‾‾‾
42 | 100
   |  84
‾‾‾‾‾‾‾‾‾
443 | 1600
    | 1329
    ‾‾‾‾‾‾
       271
```

Продолжая такимъ образомъ прибавлять къ остатку по 2 нуля, можно получить въ квадратномъ корнѣ произвольное число знаковъ; и квадратный корень будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ болѣе въ немъ десятичныхъ знаковъ.

§ 147. *О возвышенiи въ третью степень.*

Чтобы найти третью степень, или кубъ какого нибудь числа, надлежитъ оное взять множителемъ три раза, и произведенiе изъ оныхъ будетъ искомое число. И такъ кубъ $2^{хъ} = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Такимъ образомъ составлена слѣдующая таблица, въ которой въ первой строкѣ помѣщены одночленныя числа, а подъ ними ихъ кубы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Чтобы возвысить данное двучленное число въ третью степень, должно также найти

произведеніе, которое состояло бы изъ трехъ множителей, изъ коихъ каждый былъ бы равенъ данному числу. На прим. кубъ $43^{\text{хъ}} = 43 \times 43 \times 43 = 79507$. Въ послѣдствіи (для извлеченія кубическихъ корней) надобно будетъ знать, изъ какихъ частей состоитъ кубъ двучленныхъ чиселъ; для сего произведемъ умноженіе по частямъ. Если данное число 43 возвысимъ во вторую степень, то получимъ (по § 141) квадратъ перваго члена, удвоенное произведеніе изъ перваго члена на второй и квадратъ втораго, т. е., $40 \times 40 + 2 \times 40 \times 3 + 3 \times 3$.

Чтобы найти кубъ даннаго числа, надлежитъ полученную вторую степень умножить еще на данное число, т. е., на 43. Умноживъ сперва на 40, а потомъ на 3, получимъ:

40×40	умноживъ на 40	$= 40 \times 40 \times 40$, кубъ 1го члена.
$2 \times 40 \times 3$		$= 2 \times 40 \times 3 \times 40$, удвоенное произв. изъ квад. 1го члена на 2й.
3×3		$= 3 \times 3 \times 40$, произв. изъ квадр. 2го члена на 1ый.

40×40	умноживъ на 3	$= 40 \times 40 \times 3$, произ. изъ квадрата 1го члена на 2й.
$2 \times 40 \times 3$		$= 2 \times 40 \times 3 \times 3$, удвоен. произв. изъ 1го чл. на квадратъ 2го.
3×3		$= 3 \times 3 \times 3$, кубъ 2го члена.

И такъ кубъ двучленнаго числа состоитъ изъ слѣдующихъ частей: 1) куба 1го члена; 2) удвоеннаго произведенія изъ квадрата 1го члена на 2й; 3) произведенія изъ квадрата 2го члена на 1й; 4) произведенія изъ квадрата 1го члена на 2й; 5) удвоеннаго произведенія изъ 1го члена на квадратъ 2го; 6) куба втораго члена. Но удвоенное произведеніе изъ квадрата 1го члена на 2й, (см. 2) и произведеніе изъ квадрата 1го на 2й (см. 4), составляютъ вмѣстѣ утроенное произведеніе изъ квадрата 1го члена на 2й. Также произведеніе изъ квадрата 2го члена на 1й (см. 3), и удвоенное произведеніе изъ квадрата 2го члена на 1й (см. 5), равны утроенному произведенію изъ квадрата 2 члена на 1й; слѣд.

Кубъ двучленнаго числа состоитъ: I. изъ куба 1го члена; II. утроеннаго произведенія изъ квадрата 1го члена на 2й; III. утроеннаго произведенія изъ квадрата 2го члена на 1й, и IV. куба втораго члена.

Чтобъ вывести общее выраженіе для возвышенія трехчленнаго числа, на прим. 643, въ кубъ, должно сумму первыхъ двухъ членовъ принять за одинъ, и произвести умноженіе, какъ показано въ первомъ примѣрѣ.

И такъ $(643)^3 = (640 + 3)^3 =$

$(640)^3$ кубу суммы первыхъ двухъ членовъ,
$3\times(640)^2\times3$ утроенному произв. изъ квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ на 3й,
$3\times640\times(3)^2$ утроенному произ. изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ 3го,
$(3)^3$ кубу 3 члена.

Но $(640)^3$, т. е., кубъ суммы первыхъ двухъ членовъ равенъ кубу перваго члена, утроенному произведенію изъ квадрата 1го члена на 2й, утроенному произведенію изъ квадрата 2го члена на 1й, и кубу 2го члена; слѣд., поставивъ равныя числа вмѣсто равныхъ, найдемъ, что кубъ трехчленнаго числа состоитъ изъ:

I. куба 1го члена,
II. утроеннаго произведенія изъ квадрата 1го члена на 2й,
III. утроеннаго произведенія изъ 1го члена на квадратъ 2го,
IV. куба 2го члена,
V. утроеннаго произведенія изъ квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ на 3й,
VI. утроеннаго произведенія изъ суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ 3го члена,
VII. куба 3го члена.

Если данное число будетъ четырехчленное, то для составленія куба, слѣдуетъ къ найденному выраженію для составленія куба трехчленнаго числа прибавить: утроенное произ-

веденіе изъ квадрата суммы первыхъ трехъ членовъ на 4й, утроенное произведеніе изъ суммы первыхъ трехъ членовъ на квадратъ 4го и кубъ 4го члена, и т. д.

Что же касается до числа цифръ, которыя должны быть въ кубѣ какого нибудь числа, надлежитъ замѣтить слѣдующее: поелику кубъ меньшаго одночленнаго числа (т. е. 1), есть 1, а меньшаго двучленнаго числа (т. е. 10) есть 1000, то изъ сего явствуетъ, что кубы всѣхъ одночленныхъ чиселъ заключаются между 1 и 1000, т. е., изображаются 1, 2 или 3 цифрами. Кубъ меньшаго двучленнаго числа (10) есть 1000, а меньшаго трехчленнаго числа (100) есть 1000000; слѣд. кубы двучленныхъ чиселъ изображаются 4, 5 или 6 цифрами.

Для удобнѣйшаго обозрѣнія прилагается слѣдующая таблица:

Если въ корнѣ	1 цифра,	то въ кубѣ	1, 2 или 3	циф.
— — — —	2	— — — — — —	4, 5 — 6	—
— — — —	3	— — — — — —	7, 8 — 9	—
— — — —	4	— — — — — —	10, 11 — 12	—

и т. д.

Чтобы возвысить простую дробь, на прим. $\frac{2}{3}$, въ третью степень, должно оную также взять множителемъ 3 раза. И такъ $(\frac{2}{3})^3 =$

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}=\frac{8}{27}$, т. е., *чтобы возвысить простую дробь въ третью степень, слѣдуетъ только числителя и знаменателя возвысить въ третью степень; первое число сдѣлать числителемъ, а второе знаменателемъ.*

Чтобы возвысить десятичную дробь въ третью степень, должно также оную взять множителемъ 3 раза. На прим. $(0,25)^3 = 0,25\times0,25\times0,25 = 0,015625$.

§ 148. *О извлеченіи кубическихъ корней.*

Пусть будетъ 79507 данное многочленное число, коего кубическій корень требуется опредѣлить.

$\sqrt[3]{79507}$ (43.
64 кубъ 1го члена.
48 | 15507
144 утроен. произв. изъ квадрата 1го члена на 2й.
108 утроен. произв. изъ 1го чл. на квадратъ 2го.
27 кубъ 2го.
15507

Изъ таблицы, помѣщенной въ предъидущемъ параграфѣ явствуетъ, что въ корнѣ должно быть 2 знака; слѣд. оный состоитъ изъ де-

сятковъ и единицъ. Въ предъидущемъ же параграфѣ было доказано, что кубъ двучленнаго числа состоитъ изъ куба 1го члена, утроеннаго произведенія изъ квадрата 1го члена на 2^{й}, утроеннаго произведенія изъ 1го члена на квадратъ 2го, и куба 2го члена; слѣд. въ данномъ числѣ 79507 должны заключаться всѣ упомянутыя части. Кубъ 1го члена корня, т. е., десятковъ заключается въ тысячахъ, (ибо $(10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$), слѣд. въ первыхъ двухъ цифрахъ даннаго числа. Наибольшее кубическое число въ 79 содержащееся есть 64; слѣд. кубическій корень сего числа, 4 (десятка), есть первый членъ искомаго кубическаго корня. Взявъ кубъ найденнаго перваго члена искомаго корня, получимъ 64, и отнявъ оный отъ соотвѣтствующихъ знаковъ даннаго числа, получимъ въ остаткѣ 15 тысячъ. Въ семъ остаткѣ и остальныхъ цифрахъ даннаго числа должно заключаться утроенное произведеніе изъ квадрата 1го члена на 2^{й}, утроенное произведеніе изъ 1го члена на квадратъ 2го и кубъ 2го. Опредѣлимъ сперва, въ какихъ цифрахъ содержится утроенное произведеніе изъ квадрата 1го члена на 2^{й}. Квадратъ перваго члена (т. е. десятковъ) заключается въ сотняхъ; умноживъ сотни на второй членъ, т. е. единицы, получимъ сотни же; слѣд. оное произведеніе заключается въ сотняхъ,

т. е. въ 155. Чтобъ найти вторый членъ, надлежитъ сіе произведеніе раздѣлить на утроенный квадратъ перваго члена, т. е. на 48 сотенъ, (ибо 4 дес. $\times$ 4 дес. = 16 сотн.; 16 сотн. $\times$ 3 = 48 сотн.). Раздѣливъ 155 на 48, получимъ въ частномъ 3, которое число и будетъ вторымъ членомъ искомаго корня. Умноживъ утроенный квадратъ перваго члена, 48 (сотенъ) на вторый членъ 3 (един.) будемъ имѣть 144 сотни, которыя и должно подписать подъ соотвѣтствующими цифрами остатка. Далѣе, въ упомянутомъ остаткѣ должно содержаться еще утроенное произведеніе изъ 1го члена на квадратъ 2го члена. Квадратъ 2го члена = 3 ед. $\times$ 3 ед. = 9 единицамъ; слѣд. произведеніе изъ 1го члена на квадратъ 2го = 4 дес. $\times$ 9 един. = 36 десят.; а утроенное произведеніе = 3 $\times$ 36 дес. = 108 десяткамъ. Подписавъ сіе число подъ соотвѣтствующими цифрами остатка, надлежитъ еще найти кубъ 2 члена. Кубъ 3 (един.) = 27 единицамъ. И сіе число должно подписать подъ соотвѣтствующими цифрами остатка. Сложивъ всѣ найденныя части, получимъ 15507, и вычтя сіе число, будемъ имѣть въ остаткѣ 0. Изъ сего можно заключить, что данное число есть точный кубъ 43^{хъ} единицъ, ибо изъ онаго по частямъ вычтенъ безъ остатка полный кубъ 43^{хъ}; изъ сего же слѣдуетъ, что

43 есть точный кубическій корень даннаго числа.

Примѣръ 2. Извлечь кубическій корень изъ 614125.

	$\sqrt[3]{614.125}$(85	8	5
	512	8	5
192	102125	$64=(8)^2$	$25=(5)^2$
	960	3	8
	600	$192=3\times(8)^2$	$200=(5)^2\times 8$
	125	5	3
	102125	$960=3\times(8)^2\times 5$	$600=3\times(5)^2\times 8$.

Изъ сихъ рѣшеній можно вывести слѣдующія замѣчанія для извлеченія кубическихъ корней:

I. Нашедши первый членъ искомаго кубическаго корня, нужно было къ остатку прибавить еще три слѣдующія цифры для опредѣленія 2го числа. Подобными разсужденіями можно вывести (если искомый кубическій корень будетъ состоять изъ трехъ и болѣе цифръ), что для опредѣленія 3го, 4го членовъ и т. д. нужно къ остаткамъ прибавлять по 3 цифры. На семъ основано раздѣленіе данныхъ чиселъ, отъ правой стороны къ лѣвой, на

грани, состоящія изъ 3 цифръ. Въ послѣдней грани можетъ быть также 1 и 2 знака.

II. Чтобъ опредѣлить вторый членъ искомаго корня, надлежало утроенное произведеніе изъ квадрата перваго члена на 2й раздѣлить на утроенный квадратъ 1го члена. Нужно замѣтить, что сіе утроенное произведеніе заключается въ остаткѣ отъ первой грани и первой цифрѣ второй. Далѣе, утроенное произведеніе изъ 1го члена на квадратъ 2го заключается въ единицахъ слѣдующаго меньшаго разряда; и наконецъ кубъ 2 члена также содержится въ единицахъ слѣдующаго меньшаго разряда. Отъ сего то происходитъ, что для вычитанія первый знакъ перваго произведенія ставится подъ первымъ знакомъ второй грани, первый знакъ втораго произведенія подписывается подъ второю цифрою, а первый знакъ куба 2го члена подъ 3ьею цифрою той же грани. Тоже самое можно замѣтить и при опредѣленіи всякаго послѣдующаго члена.

Основываясь на сихъ замѣчаніяхъ, рѣшимъ слѣдующіе примѣры:

Примѣръ 3. Извлечь кубическій корень изъ 88716536.

$\sqrt[3]{88.716.536}$ (446

64

48 | 24716

| 192

192

64

21184

5808 | 3532536

| 34848

4752

216

3532536

$4 \times 4 = 16 = (4)^2$; $16 \times 3 = 48 = 3 \times (4)^2$; $48 \times 4 = 192 = 3 \times (4)^2 \times 4$

$4 \times 4 = 16 = (4)^2$; $16 \times 4 = 64 = (4)^2 \times 4$; $64 \times 3 = 192 = 3 \times 4 \times (4)^2$

44×44: 176, 176, $1936 = (44)^2$; $1936 \times 3 = 5808 = 3 \times (44)^2$; $5808 \times 6 = 34848 = 3 \times (44)^2 \times 6$

$6 \times 6 = 36 = (6)^2$; 36×44: 144, 144, $1584 = (6)^2 \times 44$; $1584 \times 3 = 4752 = 3 \times 44 \times (6)^2$

Примѣръ 4. Извлечь кубическій корень изъ 1191016.

$\sqrt[3]{1.191.016}$ (106

1

300 | 191016

| 1800

1080

216

191016

$1 \times 1 = 1 = (1)^2$; $1 \times 3 = 3 = 3 \times (1)^2$

$10 \times 10 = 100 = (10)^2$; $100 \times 3 = 300 = 3 \times (10)^2$; $300 \times 6 = 1800 = 3 \times (10)^2 \times 6$

$6 \times 6 = 36 = (6)^2$; $36 \times 10 = 360 = 10 \times (6)^2$; $360 \times 3 = 1080 = 3 \times 10 \times (6)^2$

Въ семъ рѣшеніи должно только замѣтить, что какъ утроенное произведеніе изъ квадрата 1^го^ члена на 2^й^, т. е. 1 (сотня тысячъ), дѣленное на утроенный квадратъ 1^го^ члена, 3 (десятка тысячъ), даетъ въ частномъ 0 (десятковъ), то и должно поставить въ искомомъ кубическомъ корнѣ 0 на мѣстѣ десятковъ.

Изъ предъидущихъ рѣшеній можно вывесть слѣдующія правила для извлеченія кубическихъ корней изъ данныхъ цѣлыхъ чиселъ:

I. *Поставивъ знакъ кубическаго корня надъ даннымъ числомъ, надлежитъ раздѣлить оное, начиная отъ правой руки къ лѣвой, на грани, полагая въ каждой по 3 цифры, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть 1 и 2 цифры.*

II. *Нашедши наибольшее кубическое число, содержащееся въ первой грани, должно соотвѣтствующій оному кубическій корень поставить первымъ членомъ искомаго корня.*

III. *Вычесть изъ первой грани кубъ найденнаго 1^го^ члена.*

IV. *Прибавивъ къ остатку слѣдующую грань отчеркнуть отъ оной первую цифру (для утроеннаго произведенія изъ квадрата 1^го^ члена на 2^й^).*

V. *Число сіе раздѣлить на утроен-*

ный квадратъ перваго члена — и найденное частное будетъ 2мъ членомъ искомаго корня. Если же первое число не дѣлится на второе, то ставится 0 на второмъ мѣстѣ корня.

VI. Умноживъ утроенный квадратъ 1го члена на найденный 2ый членъ, подписать полученное произведенiе такъ, чтобъ первая цифра онаго была подъ первою цифрою снесенной грани.

VII. Потомъ надлежитъ найти утроенное произведенiе изъ 1го члена на квадратъ 2го, и подписать оное подъ даннымъ числомъ такъ, чтобъ первая цифра онаго находилась подъ второю цифрою снесенной грани.

VIII. Наконецъ должно подписать кубъ 2го члена такъ, чтобъ его первая цифра была подъ послѣднею цифрою снесенной грани.

IX. Сложивъ всѣ упомянутыя части, надлежитъ найденную сумму вычесть изъ остатка отъ первой грани и снесенной грани.

X. Чтобъ найти третiй членъ и прочiе, должно поступать точно такъ, какъ при опредѣленiи втораго, принимая сумму предъидущихъ членовъ за одинъ членъ.

§ 149. *Извлеченіе кубическихъ корней изъ дробныхъ чиселъ.*

Чтобы возвысить простую дробь въ третью степень (§ 145), надлежитъ возвысить ея числителя и знаменателя въ третью степень. Изъ сего слѣдуетъ, что для извлеченія кубическаго корня должно сдѣлать обратное дѣйствіе, т. е. извлечь кубическій корень какъ изъ числителя, такъ и знаменателя, и корень перваго будетъ числителемъ, а втораго знаменателемъ.

Примѣры:

$$\text{I.}\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{II.}\quad \sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{7}{10}$$

Если же числитель или знаменатель, или оба члена дроби суть неизвлекомыя числа, то простая дробь обращается въ десятичную, и изъ послѣдней извлекается кубическій корень, какъ ниже показано.

Извлеченіе кубическихъ корней изъ десятичныхъ дробей производится совершенно по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для извлеченія кубическихъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ; все

различіе заключается въ раздѣленіи на грани. Поелику первый знакъ десятичной дроби означаетъ десятыя, а кубъ десятыхъ долей даетъ тысячныя; то для опредѣленія перваго десятичнаго знака искомаго корня должно отдѣлить отъ данной десятичной дроби 3 цифры. Для опредѣленія прочихъ цифръ искомаго корня, надлежитъ также сносить грани, изъ 3 цифръ состоящія, и поступать точно такъ, какъ при извлеченіи кубическихъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ. Можетъ случиться, что для послѣдней грани останется только 1 или 2 цифры; то въ такомъ случаѣ грань дополняется нулями, основываясь на томъ, что величина десятичной дроби отъ того не измѣняется (§ 97).

Примѣръ 1. Извлечь кубическій корень изъ 0,015625.

$$\sqrt[3]{0,015.625}\ (0,25$$

```
  8
12| 7625
  | 60
    150
     125
   7625
```

Примѣръ 2. Извлечь кубическій корень изъ 0, 5.

$$\sqrt[3]{0,500}\ (0,7$$

```
 343
 157
```

Здѣсь надлежитъ замѣтить, что данная десятичная дробь должна быть сперва приведена въ тысячныя доли (т. е. надобно дополнить грань): ибо кубъ десятыхъ заключается въ тысячныхъ; потомъ же поступать, какъ выше показано.

Если данное число состоитъ изъ цѣлаго числа съ десятичною дробью, то цѣлое раздѣляется на грани отъ правой руки къ лѣвой, начиная отъ запятой, а десятичная дробь отъ лѣвой къ правой.

Примѣръ 3. Извлечь кубическій корень изъ 9,528128.

$\sqrt[3]{9,528.128}$ (2,12.
8
12 | 1528
| 1261
1323 | 267128
| 2646
2528
267128

§ 150. *Извлеченіе приближенныхъ кубическихъ корней изъ неизвлекомыхъ чиселъ.*

Пусть будетъ данное число 31. Изъ таблицы въ § 147 помѣщенной, явствуетъ, что кубическій корень сего числа болѣе 3хъ, а менѣе 4. Чтобъ опредѣлить оный корень точ-

нѣе, должно найти, сколько въ немъ, сверхъ 3 единицъ, содержится десятыхъ, сотыхъ и т. д. частей.

Кубъ десятыхъ заключается въ тысячныхъ; посему остатокъ отъ цѣлаго числа, 4 единицы, должно привести въ тысячныя доли, и потомъ поступать какъ показано въ предъидущемъ параграфѣ.

```
∛31 (3,1
  27
27| 4000
  | 2791
    1209
```

И такъ въ искомомъ кубическомъ корнѣ, сверхъ 3 единицъ, содержится еще 1 десятая. Чтобы найти, сколько сотыхъ должно быть въ корнѣ, надлежитъ къ остатку прибавить еще 3 нуля, т. е. привести въ милліонныя доли (ибо $\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{1000000}$), и потомъ поступать по предъидущему.

$\sqrt[3]{31}$ (3,14
27
24 | 4000
| 2791
2883 | 1209000
| 11532
1488
64
116844
40856

Продолжая такимъ образомъ прибавлять къ остатку по 3 нуля, можно получить въ искомомъ кубическомъ корнѣ произвольное число десятичныхъ знаковъ, и оный будетъ тѣмъ болѣе приближаться къ настоящей своей величинѣ, чѣмъ болѣе будетъ десятичныхъ знаковъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ II.

(Къ § 49.)

I. Сравнительная таблица иностранныхъ Европейскихъ монетъ съ Россійскими.

Австрія.

Специесъ талеръ. . . . . . = 1,300 руб. сер.
Въ 1 специесъ-талерѣ 2 гульдена, а въ 1 гульденѣ 60 крейцеровъ.
Червонецъ Имперскій . . . = 2,871 руб. зол.
Червонецъ Венгерскій или Кремницкій . . . . = 2,881 — —

Англія.

Крона . . . . = 1,524 руб. сер.
Въ 1 кронѣ 5 шиллинговъ, въ 1 шиллингѣ 12 пенсовъ, а въ 1 пенсѣ 4 фартинга.
Гинея (21 шилл) . . . . . = 6,406 руб. зол.
Соверенъ (20 шилл.) . . . = 6,107 — —
20 шиллинговъ составляютъ фунтъ стерлингъ.

Венеція.

Талеро. . . . . = 2,167 руб. сер.

Въ 1 талеро 10 лиръ, въ 1 лирѣ 20 солди, а въ 1 солди 20 центимовъ.

Суверенъ (40 лиръ). . . . = 8,507 руб. зол.
Чекино. . . . . = 2,89 — —

Данія.

Долларъ (рейхсбанкъ) = 0,703 руб. сер.

Въ 1 долларѣ 3 марка, а въ 1 маркѣ 16 шиллинговъ.

Червонецъ или дукатъ специесъ = 2,871 руб. зол.
Христіандоръ . . . . = 5,050 — —

Гамбургъ.

Рейхсталеръ (банко). . . . . = 1,444 руб. сер.

Въ 1 талерѣ 3 марка, а въ 1 маркѣ 16 шиллинговъ.

Червонецъ Имперскій . . . = 2,860 руб. зол.

Голландія.

Ефимокъ. . . . . = 1,336. руб. сер.

Въ 1 ефимкѣ 2½ гульдена, въ 1 гульденѣ 20 штиверовъ, въ 1 штиверѣ 4 дюйта.

Червонецъ. . . . . = 2,863 руб. зол.

Испанія.

Піастръ. . . . . = 1,348 руб. сер.
Въ 1 піастрѣ 20 реаловъ, а въ 1 реалѣ 34 мараведисъ.

Пистоль . . . . = 4,938 руб. зол.

Неаполь и Сицилія.

Дукато . . . . = 1,063 руб. сер.
Въ 1 дукато 5 скуди, а въ 1 скудо 20 грани.

Ончетта . . . . = 3,145 руб. зол.

Португаллія.

Крузадо. . . . . = 0,732 руб. сер.
Въ 1 крузадо 12 реаловъ, въ 1 реалѣ 40 реесъ.

Добраонъ . . . . = 43,47 руб. зол.

Пруссія.

Талеръ. . . . . = 0,929 руб. сер.
Въ 1 талерѣ 24 старыхъ или 30 нов. грошей, а въ 1 грошѣ 12 пфениговъ.

Фридрихсд'оръ . . . . . . = 5,031 руб. зол.

Римъ.

Скудо . . . . = 1,347 руб. сер.
Въ 1 скудо $3\frac{1}{3}$ тестони, въ 1 тестони 3 паоли.

Чекино . . . . = 2,857 руб. зол.

Саксонія.

Рейхсталеръ . . . . = 0,975 руб. сер.
Специесъ-талеръ . . . . . . = 1,300 — —
Въ 1 талерѣ 24 гроша, въ 1 грошѣ 12 пфениговъ.

Турція.

Піастръ . . . . = 0,100 руб. сер.
Въ 1 піастрѣ 40 пара.
Фондукъ. . . . . = 2,890 руб. зол.

Франція.

Франкъ . . . . = 0,250228 р. сер.
Въ 1 франкѣ 20 су, а въ 1 су 5 центимовъ.
Луидоръ (новый) въ 20 франковъ = 4,84313 р. з.

Швейцарія.

Франкъ. . . . . = 0,375 руб. сер.
Въ 1 франкѣ 10 баценовъ, а въ 1 баценѣ 4 крейцера.
Луидоръ (старый). . . . . . = 6,004 руб. зол.

Швеція.

Рейхсталеръ . . . . = 1,429 руб. сер.
Въ 1 талерѣ 48 шиллинговъ, а въ 1 шиллингѣ 12 пфениговъ.
Червонецъ. . . . . = 2,833 руб. зол.

Примѣч. Монеты, которыя въ сей таблицѣ сравнены съ Россійскою золотою монетою, суть также золотыя.

II. Сравнительная таблица главнѣйшихъ Европейскихъ линейныхъ мѣръ съ Россійскими.

1) *Футы.*

	лн.
Австрійскій футъ	1 ф. 0 д. 4,45 лин.
——клафтеръ (6 футовъ)	6 — 2 — 6,68 —
Англійскій футъ ($\frac{1}{6}$ фатома)	1 ф. 0 — 0,00 д.
——— ярдъ (3 фута)	3 — 0 — 0,00 —
Датскій футъ ($\frac{1}{10}$ руте)	1 — 0 — 3,47 —
Испанскій футъ.........	11 — 1,28 —
Неаполитанскій пальмо....	10 — 3,46 —
Нидерландскій футъ	11 — 1,44 —
Португальскій футъ	1 — 1 — 3,30 —
Прускій или Рейнскій ф. ($\frac{1}{12}$ рут.)................	1 — 0 — 3,56 —
Римскій пальмо...............	8 — 7,95 —
——— футъ..........	11 — 5,99 —
Саксонскій футъ ($\frac{1}{6}$ клафтера)	11 — 1,52 —
Турецкій большой пикъ ...	2 — 2 — 3,41 —
——— дра стамбулинъ	2 — 1 — 5,06 —
Французскій футъ ($\frac{1}{6}$ тоаза)	1 — 0 — 7,89 —
——— метръ........	3 — 3 — 3,7079—
Шведскій футъ ($\frac{1}{16}$ руте)......	11 — 6,86

2) *Мили.*

	Величина въ сажен.	Сколько въ 1 град. экв.
Австрійскія	3555,6	14,67
Англійскія (новыя)	754,3	69,12
(морскія)	869,3	60,00
Голландскія	2747,8	18,98
Датскія	3530,3	14,77
Испанскія	3311,9	15,75
Италіянскія	869,3	60,00
Нидерландскія (часы)	2654,1	19,65
(морскія)	2608,0	20,00
Нѣмецкія (новыя)	2942,0	17,73
(географич)	3477,3	15,00
Португальскія	2900,3	18,00
Прусскія	3633,3	14,35
Римскія	691,5	75,42
Русскія (версты)	500,0	104,32
Саксонскія	4248,3	12,28
Турецкія (берри)	783,0	66,62
морскія	614,7	84,85
Французскія	2088,3	24,97
морскія	2608,0	20,00
Шведскія	5015,1	10,40
Швейцарскія	3925,7	13,29

III. Сравнительная таблица иностранныхъ Европейскихъ вѣсовъ съ Россійскими.

	Фунты Россійск.	Гран. (*) Англійск.
Австрійскій торговый фун. =	1,369	8645
Англійскій торговый...... =	1,108	7000
Венеціанскій тяжелый .... =	1,165	7363
Датскій торговый .... =	1,222	7720
Гамбургскій торг......... =	1,184	7476
Голландскій новый....... =	2,443	15434
Испанскій торговый..... =	1,124	7101
Португальскій........... =	1,121	7083
Прусскій................ =	1,141	7218
Турецкій (окъ)........... =	3,141	19830
Французскій киллограммъ =	2,443	15434
Шведскій виктуальный... =	1,039	6563

(*) Въ Россійскомъ фунтѣ 6316 Англійскихъ грановъ.

Конецъ.